A property of diagrams of the trivial knot

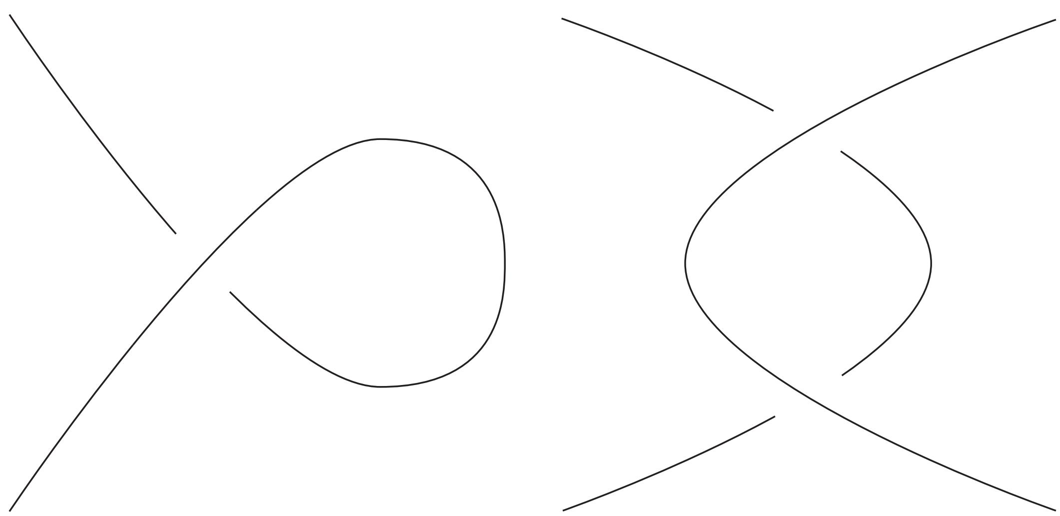
小沢　誠
（駒澤大学総合教育研究部自然科学部門）

2006年9月21日

$K \subset S^3$: 結び目
$\pi(K) \subset S^2$: 正則表示

定義

$\pi(K)$が**I-既約** (resp. **II-既約**)
$\Longleftrightarrow$ ライデマイスター移動 I (resp. II)で交点数を減らすことができない



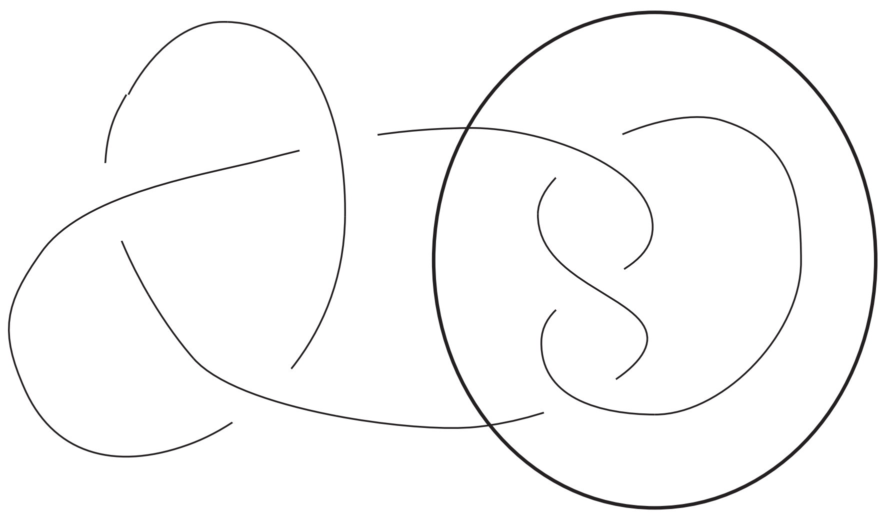
I-既約またはII-既約の場合、このような部分がない

定義

$\pi(K)$が**素**

$\Longleftrightarrow$

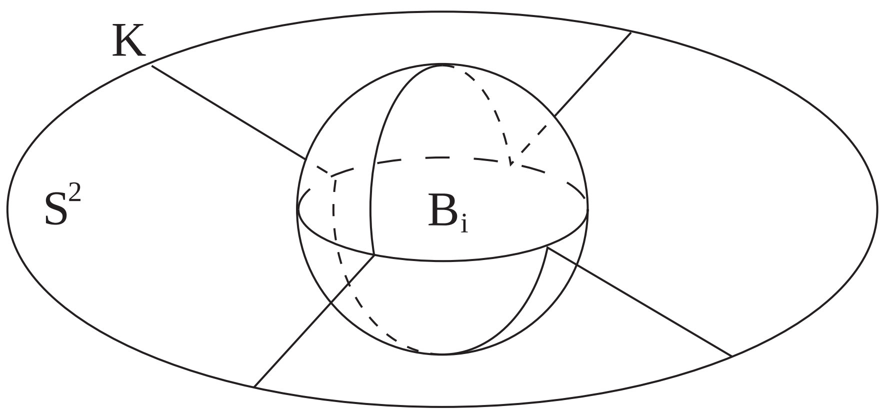
- 少なくとも１つの交点を含み、
- 交点以外の２点で交わる任意のループlに対して、S^2内のディスクDが存在し、$D \cap \pi(K)$が１本のアークから成る



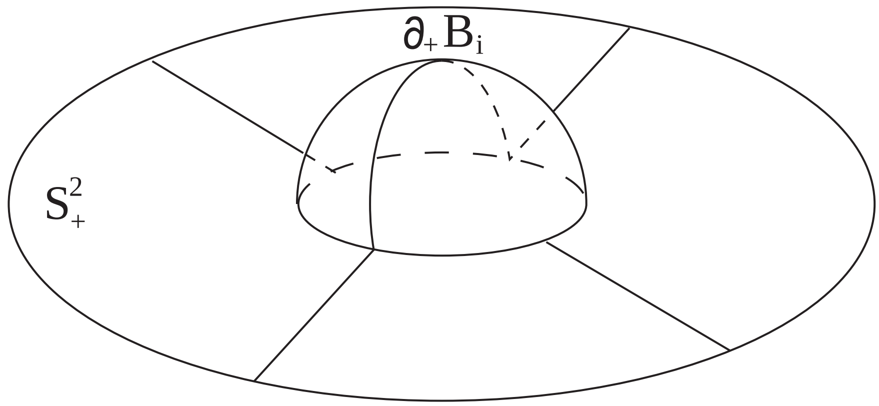
素でない例

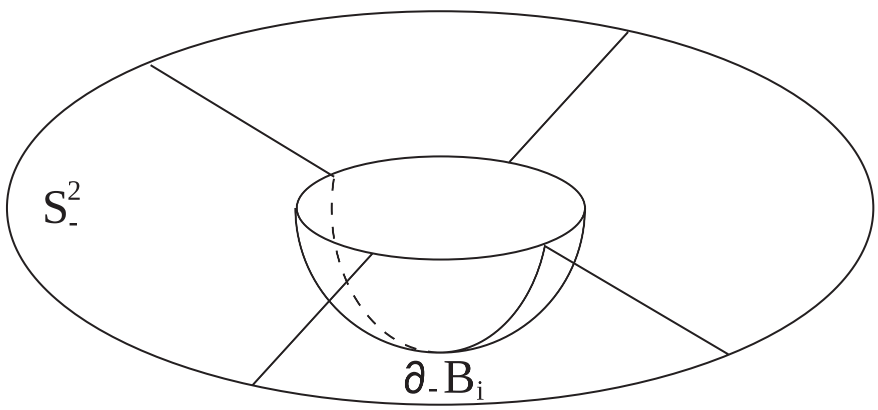
次のメナスコの方法に従ってKを置く。

$\pi(K)$の各交点c_iに対して、上交点と下交点の間に小さい３次元球体B_i（バブル）を挿入し、$N(c_i;K)$の上弧を∂B_iの上半球面$\partial_+ B_i$上に、下弧を∂B_iの下半球面$\partial_- B_i$上にイソトープする。



S^2から各赤道上のディスク$B_i \cap S^2$を上半球面$\partial_+ B_i$（resp.　下半球面$\partial_- B_i$）に置き換えて得られる２次元球面をS^2_+ (resp.　S^2_-) とする。





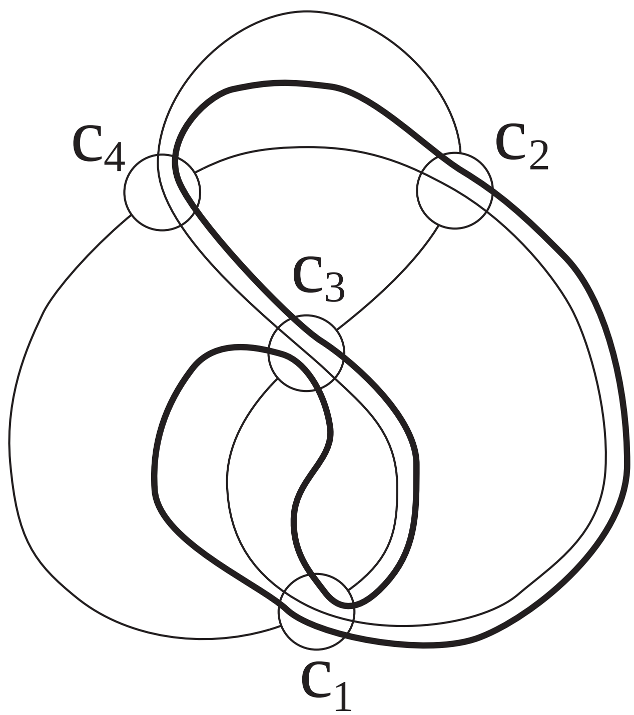
$P = S^2_+ \cap S^2_-$とおく。

$P - \pi(K)$の各成分を領域と呼ぶ。Bを全てのバブルの和とし、Rを全ての領域の和とする。

定義

ループ $l \subset S^2_+ - K$ (resp. $S^2_- - K$) が **+-メナスコループ** (resp. **−-メナスコループ**) $\Longleftrightarrow$

- 各領域 R_j に対して、$l \cap R_j$ の各成分は $\partial B \cap R_j$ の異なるアーク成分を繋ぐアーク
- 各バブル B_i に対して、$l \cap \partial B_i$ の各成分は異なる領域を繋ぐアーク

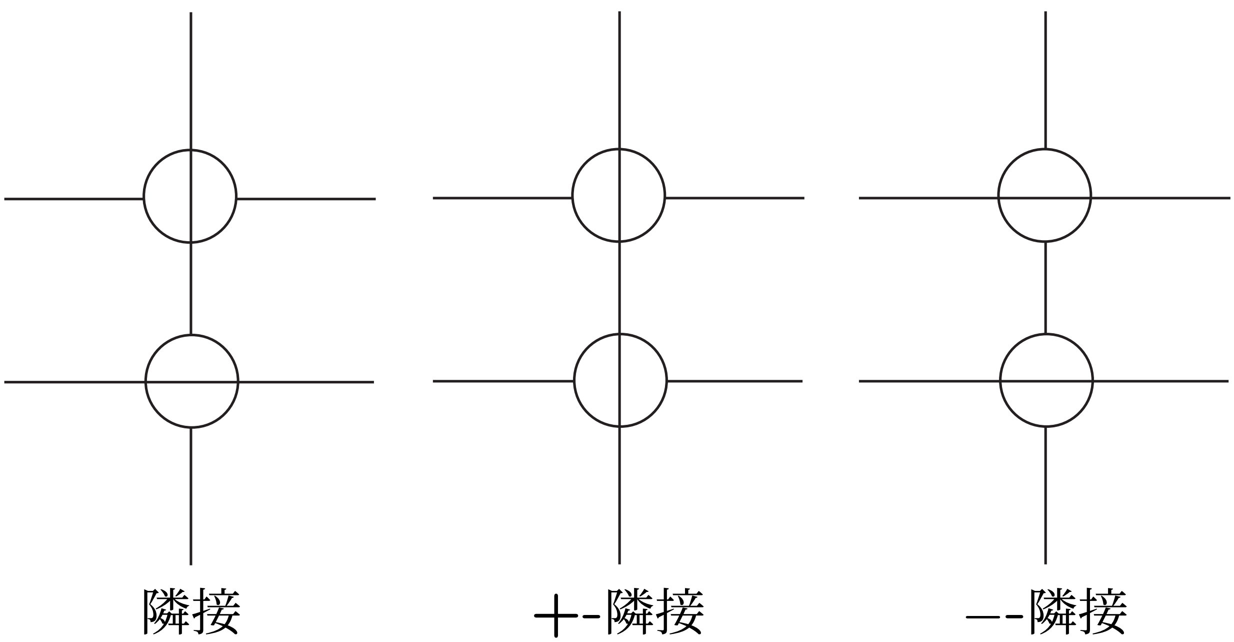


+-メナスコループの例

定義

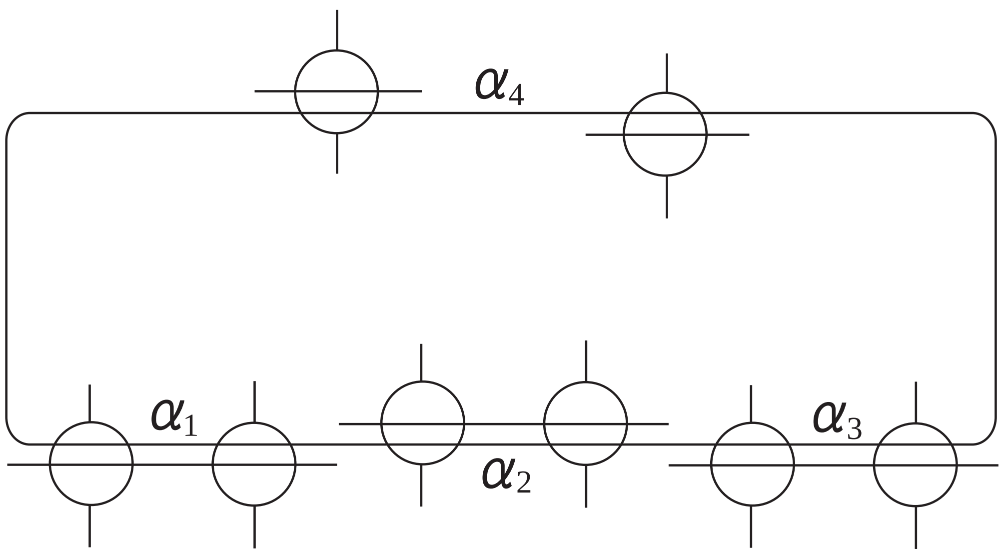
２つの交点c_iとc_jが

- **隣接** $\Longleftrightarrow$ ２つのバブルB_iとB_jを繋ぐ$K \cap P$のアークγが存在
- **$+$-隣接**（resp. **$-$-隣接**）$\Longleftrightarrow$ γが２つの上弧$K \cap \partial_+ B_i$と$K \cap \partial_+ B_j$（resp. ２つの下弧$K \cap \partial_- B_i$ and $K \cap \partial_- B_j$)を繋ぐ



定理

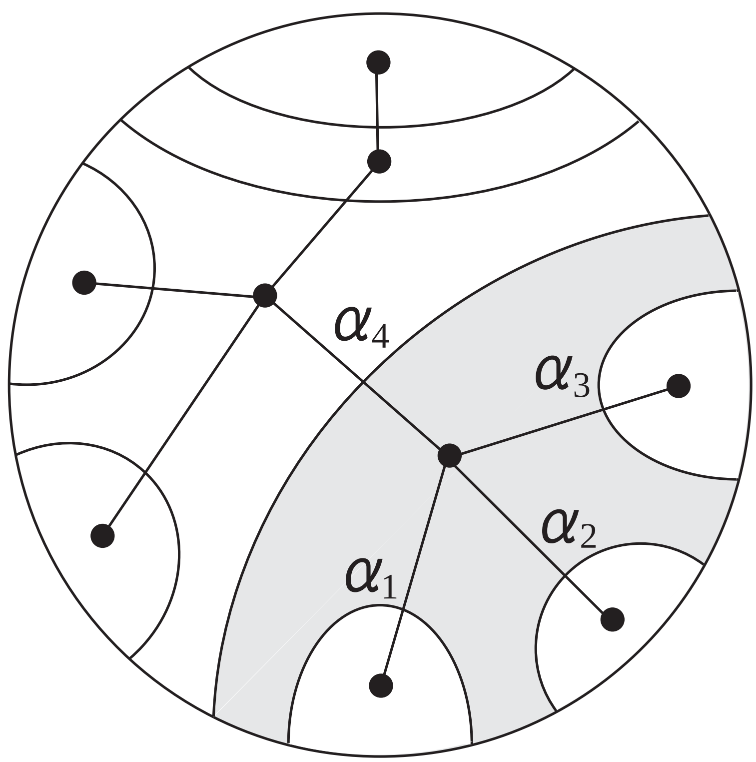
自明な結び目の任意のI-既約、II-既約、素な正則表示には、$2n$ 個の交点 $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$ を通る $\pm$-メナスコループで、$n \geq 2$ かつ $i = 1, \ldots, n-1$ について c_{2i-1} は c_{2i} に $\pm$-隣接であるものが存在する。



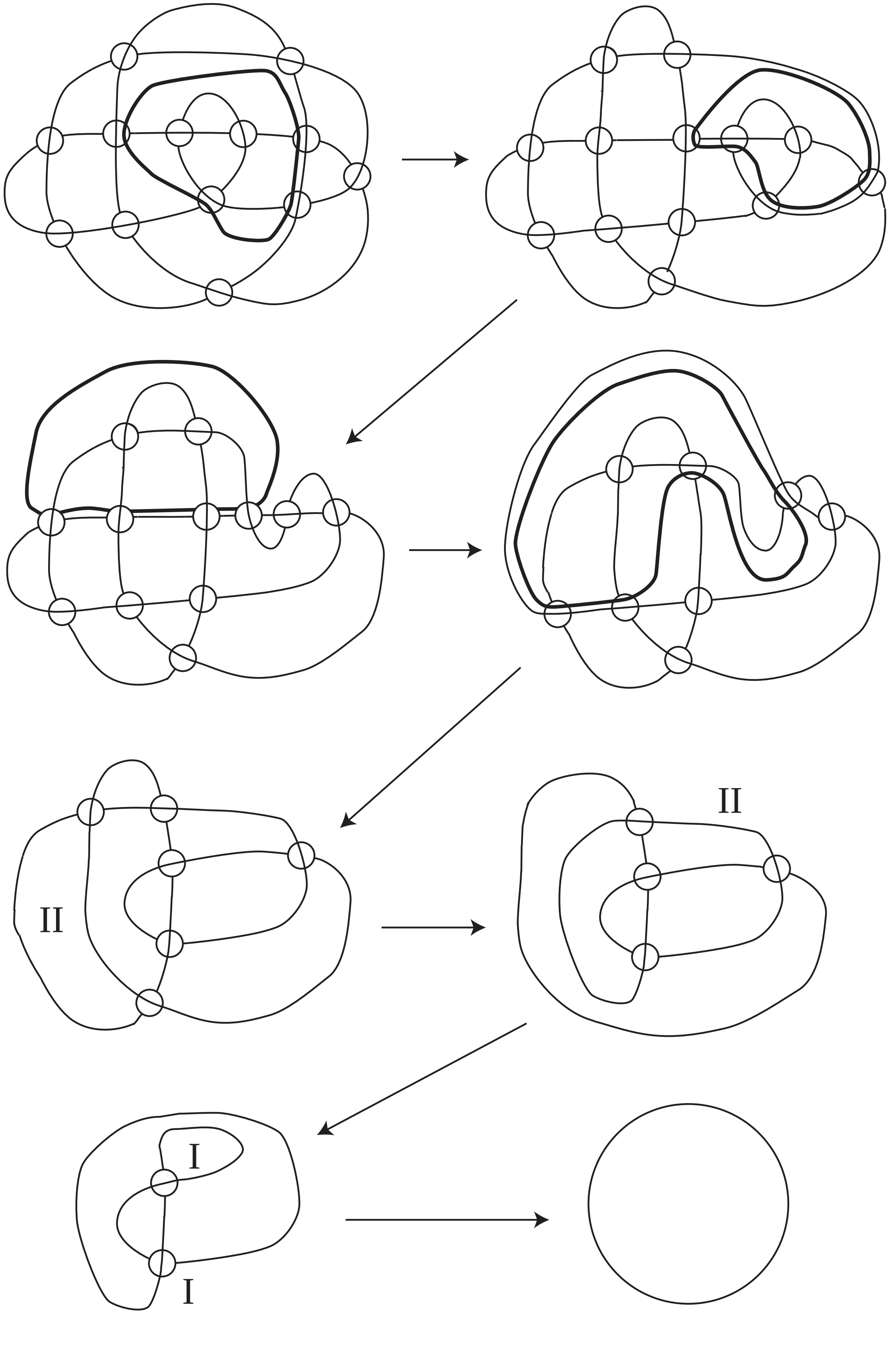
定理の条件を満たす $+$-メナスコループ

証明

Kが自明
$\Rightarrow$ $E(K)$内の圧縮不可能かつ境界圧縮不可能な向き付け可能曲面はメリディアンディスクのみ
$\Rightarrow$ $\pi(K)$から作られるチェッカーボード曲面の近傍の境界は圧縮可能
$\Rightarrow$ 圧縮ディスクと領域との交わりを考える
$\Rightarrow$ outermost forkの境界が条件を満たすメナスコループを与える



outermost fork



II
II
I
I