Morse position of knots and closed incompressible surfaces

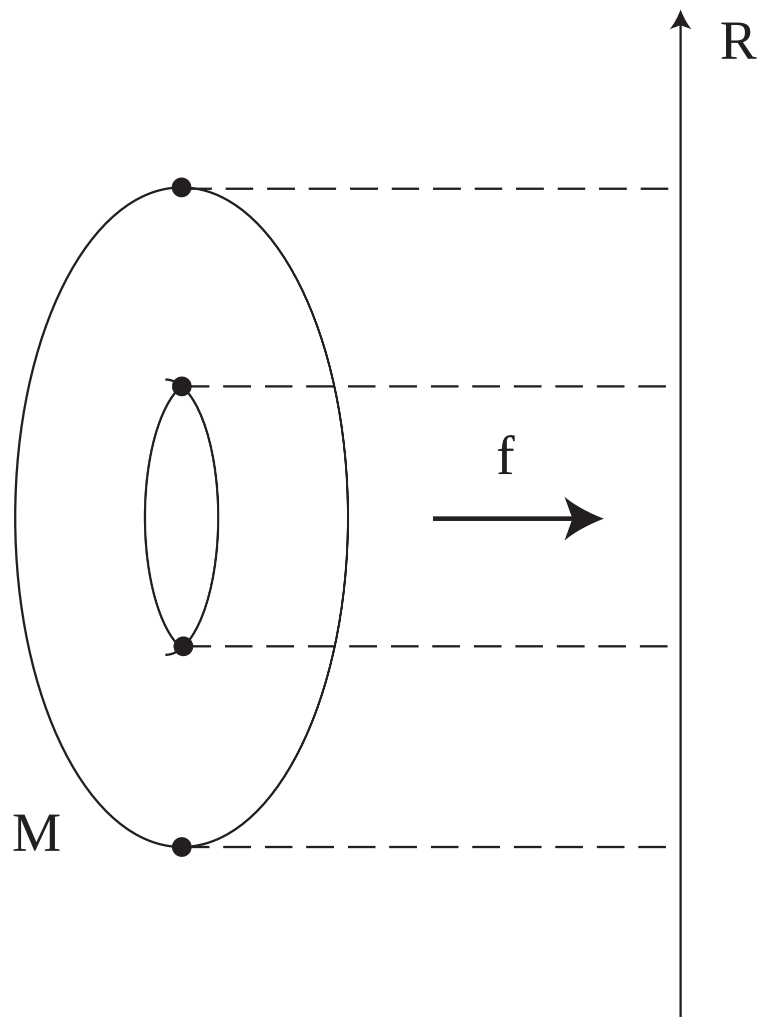
小沢　誠（駒澤大学）

2005年8月30日

Definition.

定義（Morse関数）

多様体 M 上の関数 $f: M \to \mathbb{R}$ の各臨界点が非退化であるとき、f を **Morse関数**という。

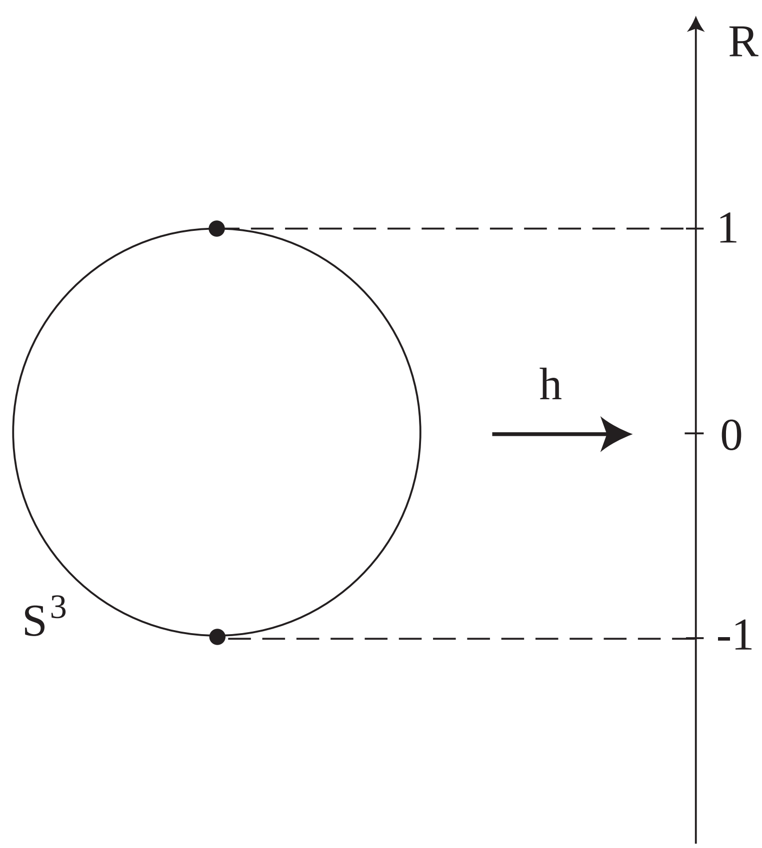


$h: S^3 \to \mathbb{R}$ を S^3 上の標準的な Morse 関数とする。

即ち、

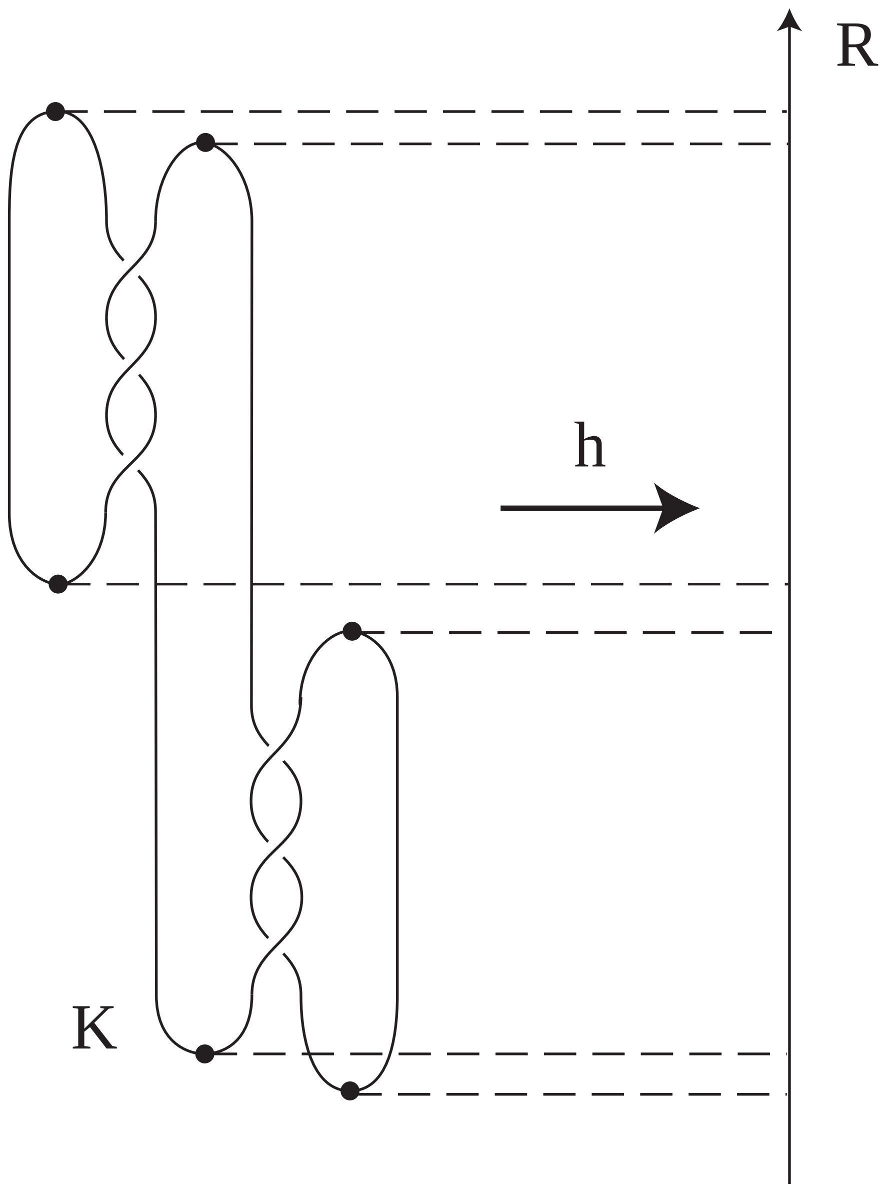
$i: S^3 \to \mathbb{R}^4$ ： 包含写像
$p: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$: 射影 $(x, y, z, w) \mapsto w$

とするとき、$h = p \circ i$



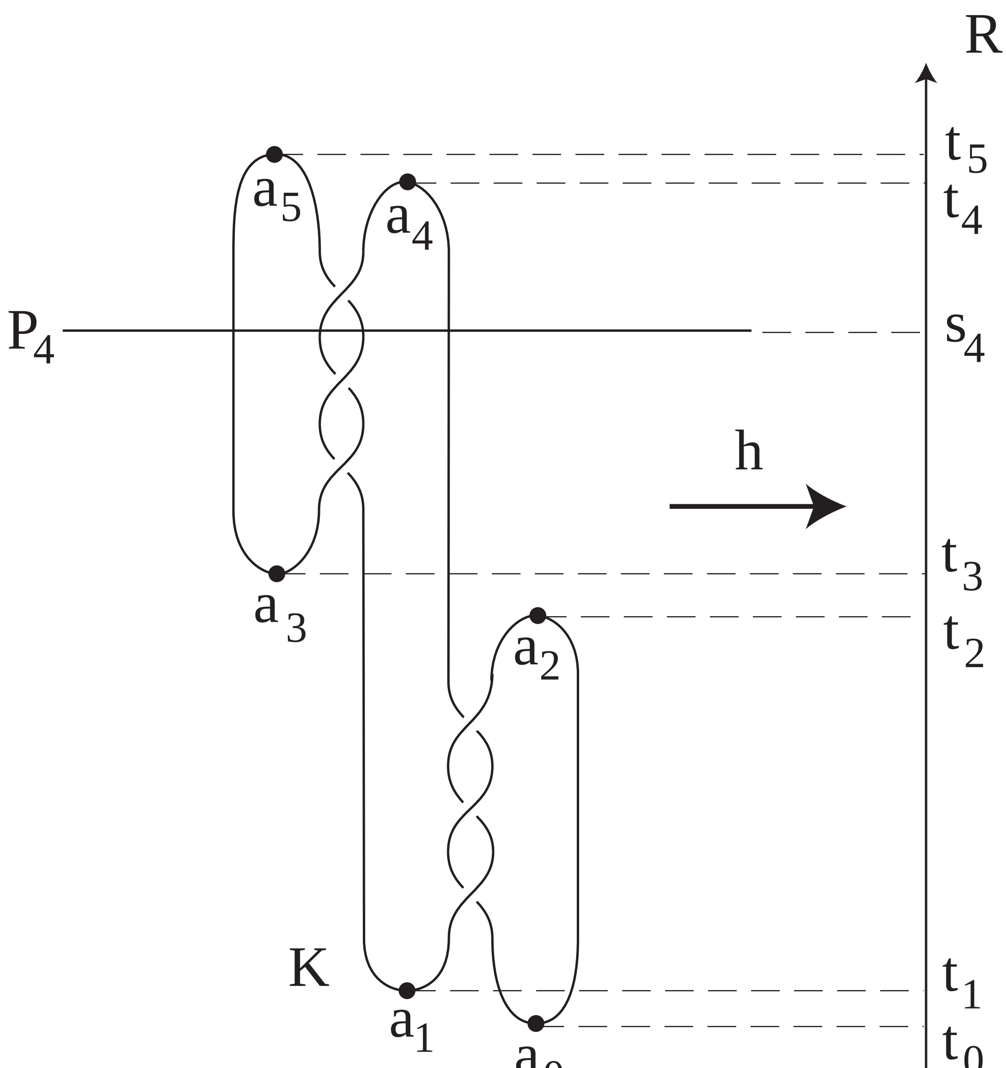
定義（Morse position）

Morse関数$h : S^3 \to \mathbb{R}$の結び目$K \subset S^3$への制限がMorse関数であるとき、Kはhに関して**Morse position**にあるという。



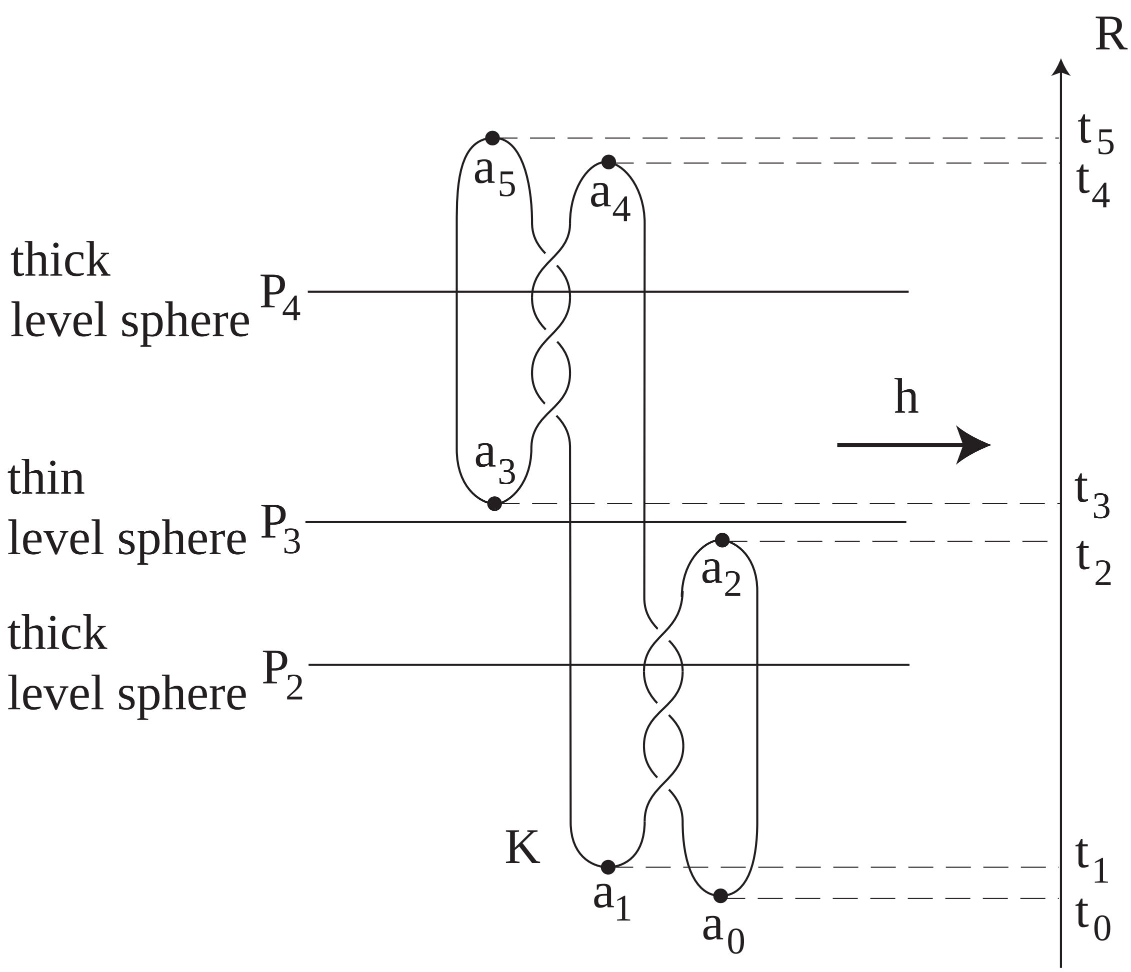
$a_0, \ldots, a_n$ を K の臨界点で、対応する臨界値 $t_i = h(a_i)$ が、各 i に対して $t_{i-1} < t_i$ を満たすものとする。

正則値 $s_i \in (t_{i-1}, t_i)$ に対して、$P_i = h^{-1}(s_i)$ を a_{i-1} と a_i の間の **level sphere** という。



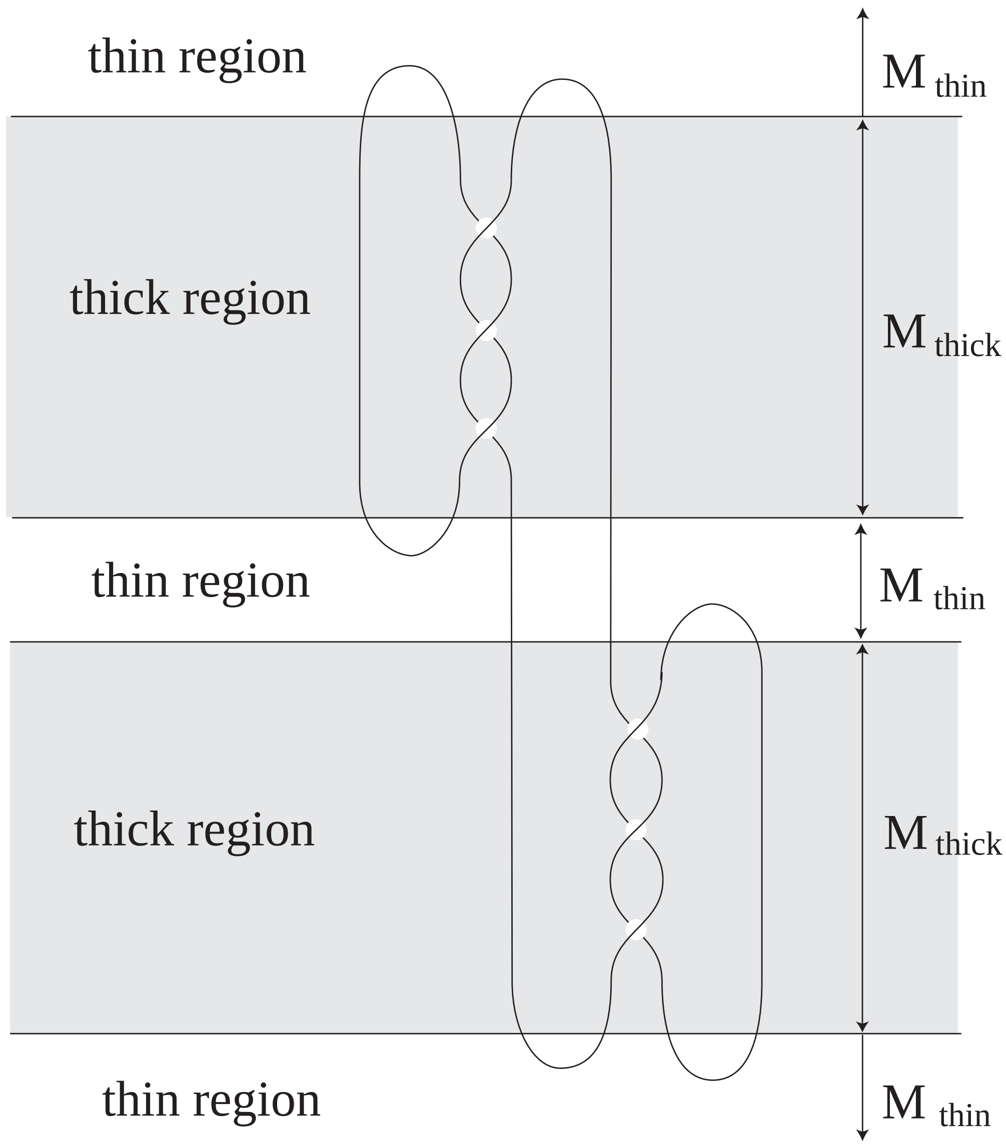
a_{i-1} が極大点で a_i が極小点であるとき、P_i を **thin level sphere** という。

a_{i-1} が極小点で a_i が極大点であるとき、P_i を **thick level sphere** という。



各thick level sphere P_iに対して、**thick region**を$h^{-1}([t_{i-1}+\epsilon, t_i-\epsilon])$で定める。

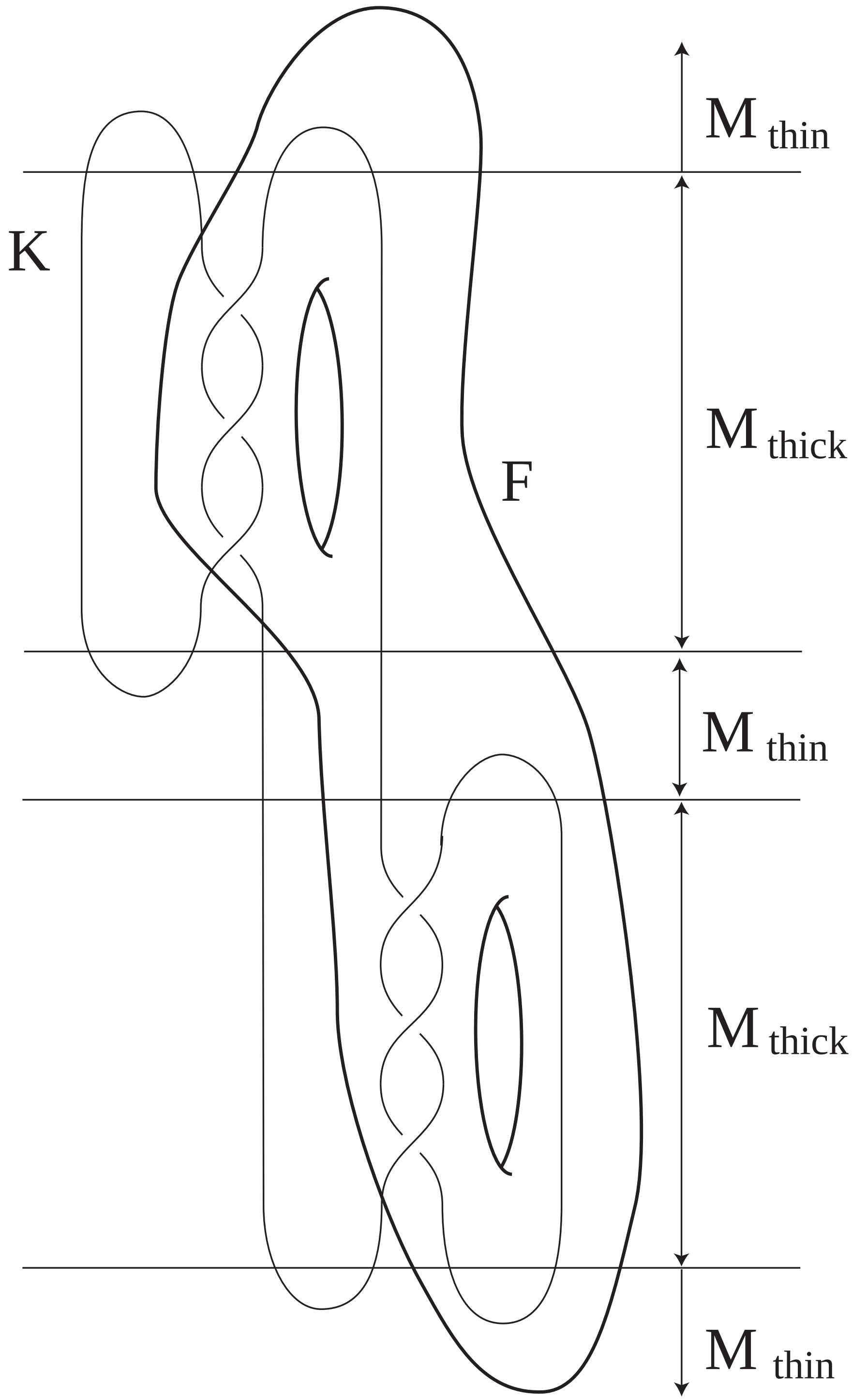
全てのthick regionの和をM_{thick}とし、M_{thick}の残りの各成分を**thin region**と呼び、和をM_{thin}で表す。



FをS^3内のclosed surfaceで、Kと交わらないか、又はKと横断的に交わるものとする。

Fが次を満たすとき、K**に関して Morse position**にあるという。

1. Fはhに関して Morse position
2. FとKは一般の位置にあり、$F \cap K \subset M_{thick}$
3. Fの全ての極大点と極小点はM_{thin}に含まれ、全ての鞍点はM_{thick}に含まれる。



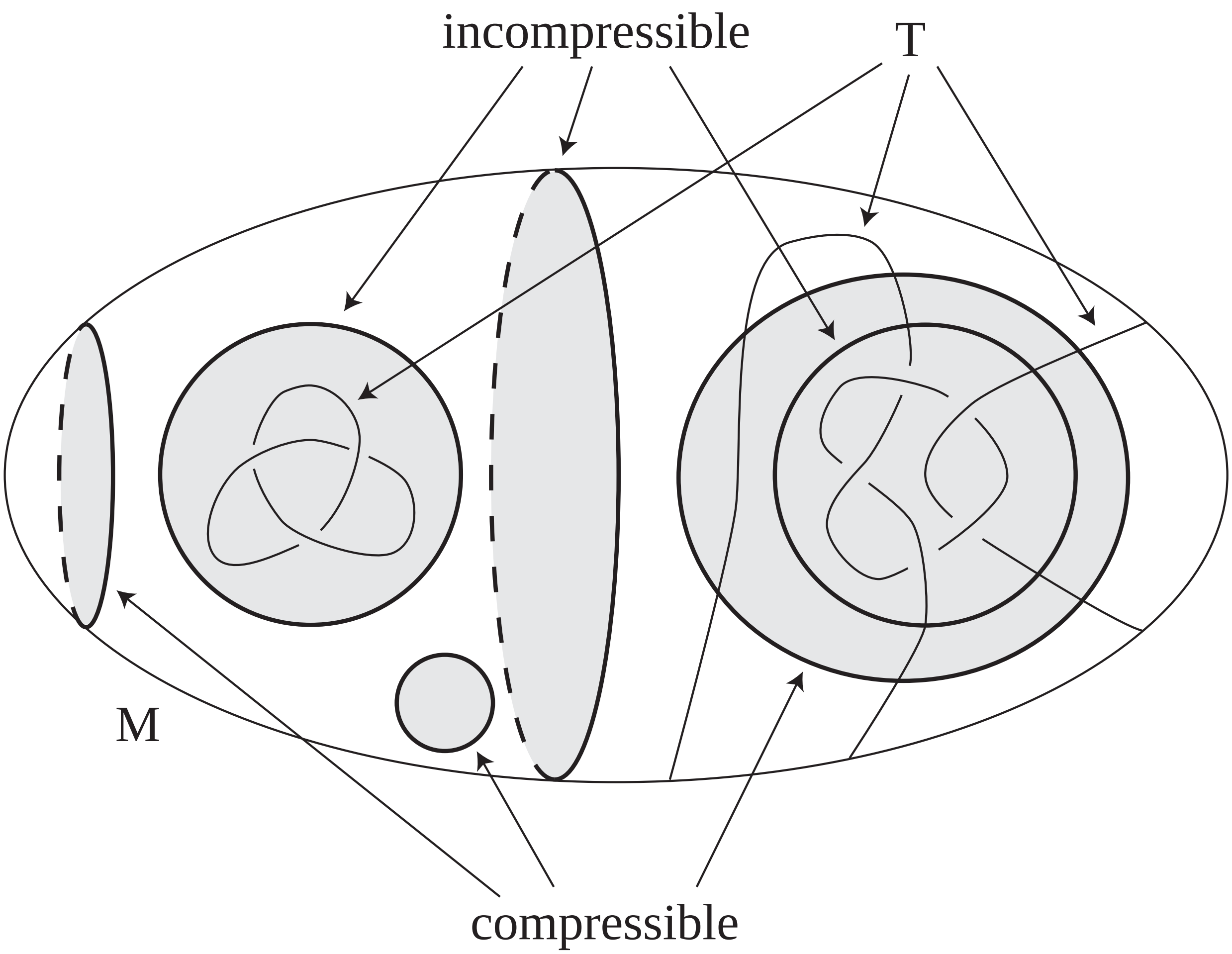
K
F
M thin
M thick
M thin
M thick
M thin

Mを３次元多様体、TをM内に適切に埋め込まれた１次元多様体、FをM内に適切に埋め込まれた曲面でTと交わらないか又はTと横断的にFの内部で交わるものとする。

定義（incompressible）

Fが次を満たすとき、(M,T)内で**incompressible**という。

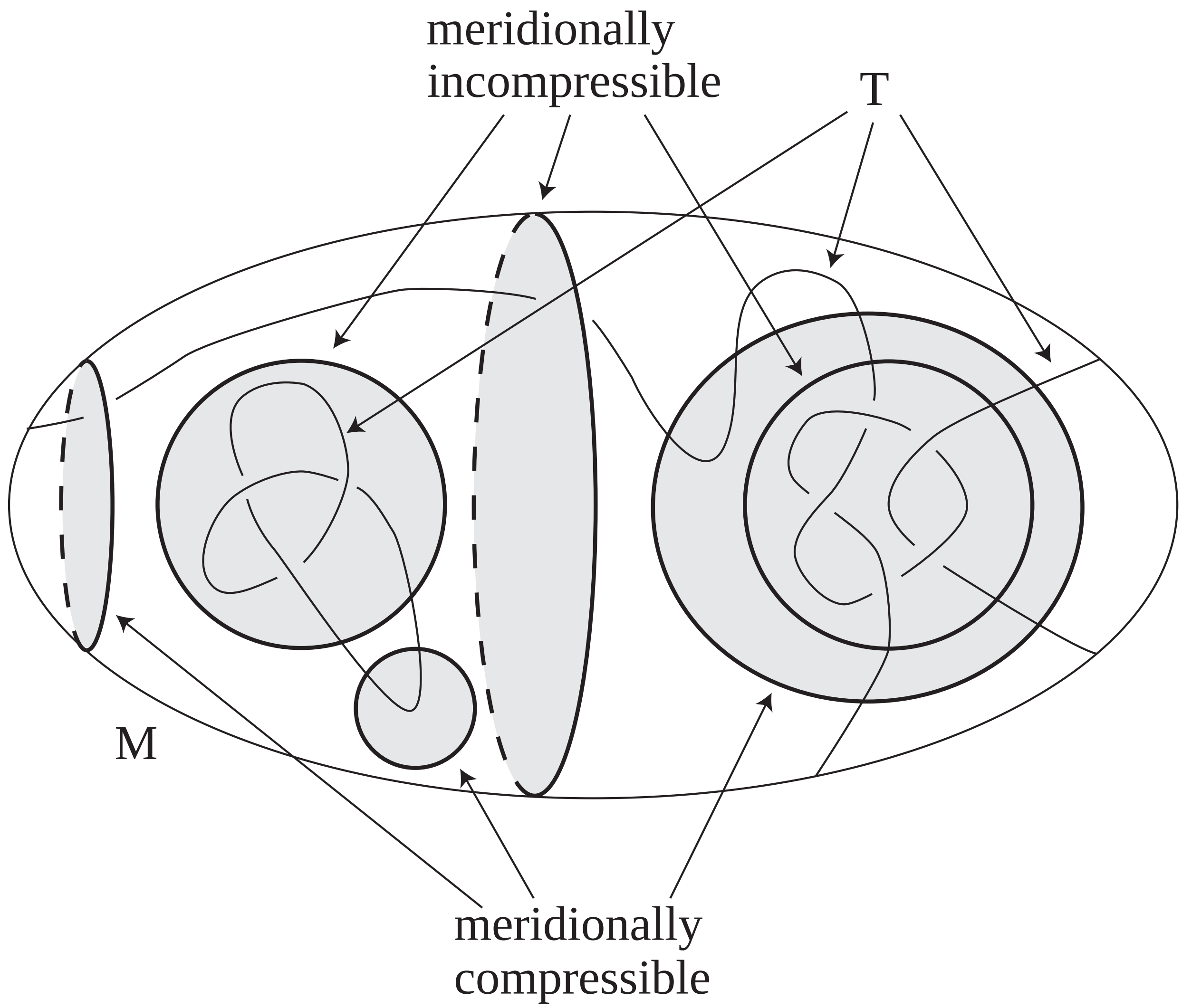
1. 【$F=S^2$, $F\cap T=\emptyset$の場合】
   $\not\exists\ B^3\subset M-T$, s.t. $\partial B^3=F$
2. 【$F=D^2$, $F\cap T=\emptyset$の場合】
   $\not\exists\ B^3\subset M-T$,
   s.t. $\partial B^3=F\cup D\ (D\subset\partial M)$
3. 【その他の場合】
   $\forall\ D^2\subset M-T,\ D^2\cap F=\partial D^2,$
   $\exists\ D^{2\prime}\subset F-T$, s.t. $\partial D^{2\prime}=\partial D$


incompressible
T
M
compressible

定義（meridionally incompressible）

F が次を満たすとき、(M, T) 内で **meridionally incompressible** という。

1. 【$F = S^2$, $F \cap T =$ 2点の場合】
   $\nexists\ B^3 \subset M$,
   s.t. $\partial B^3 = F$ かつ $(B^3, T \cap B^3)$ が自明
2. 【$F = D^2$, $F \cap T =$ 1点の場合】
   $\nexists\ B^3 \subset M$,
   s.t. $\partial B^3 = F \cup D$ $(D \subset \partial M)$ かつ
   $(B^3, T \cap B^3)$ が自明
3. 【その他の場合】
   $\forall\ D^2 \subset M$, $D^2 \cap F = \partial D^2$, $D^2 \cap T =$ 1点,
   $\exists\ D^{2\prime} \subset F$, $\exists\ B^3 \subset M$,
   s.t. $\partial B^3 = D^2 \cup D^{2\prime}$ かつ
   $(B^3, T \cap B^3)$ が自明


meridionally
incompressible
T
M
meridionally
compressible

$K \subset S^3$をhに関してMorse positionにある結び目とし、$F \subset S^3$をKに関してMorse positionにある閉曲面とする。

Fが次を満たすとき、K**に関して essential Morse position**にあるという。

4. $F \cap M_{thin}$及び$F \cap M_{thick}$の各成分が、それぞれ$(M_{thin}, K \cap M_{thin})$及び$(M_{thick}, K \cap M_{thick})$でincompressible かつ meridionally incompressible

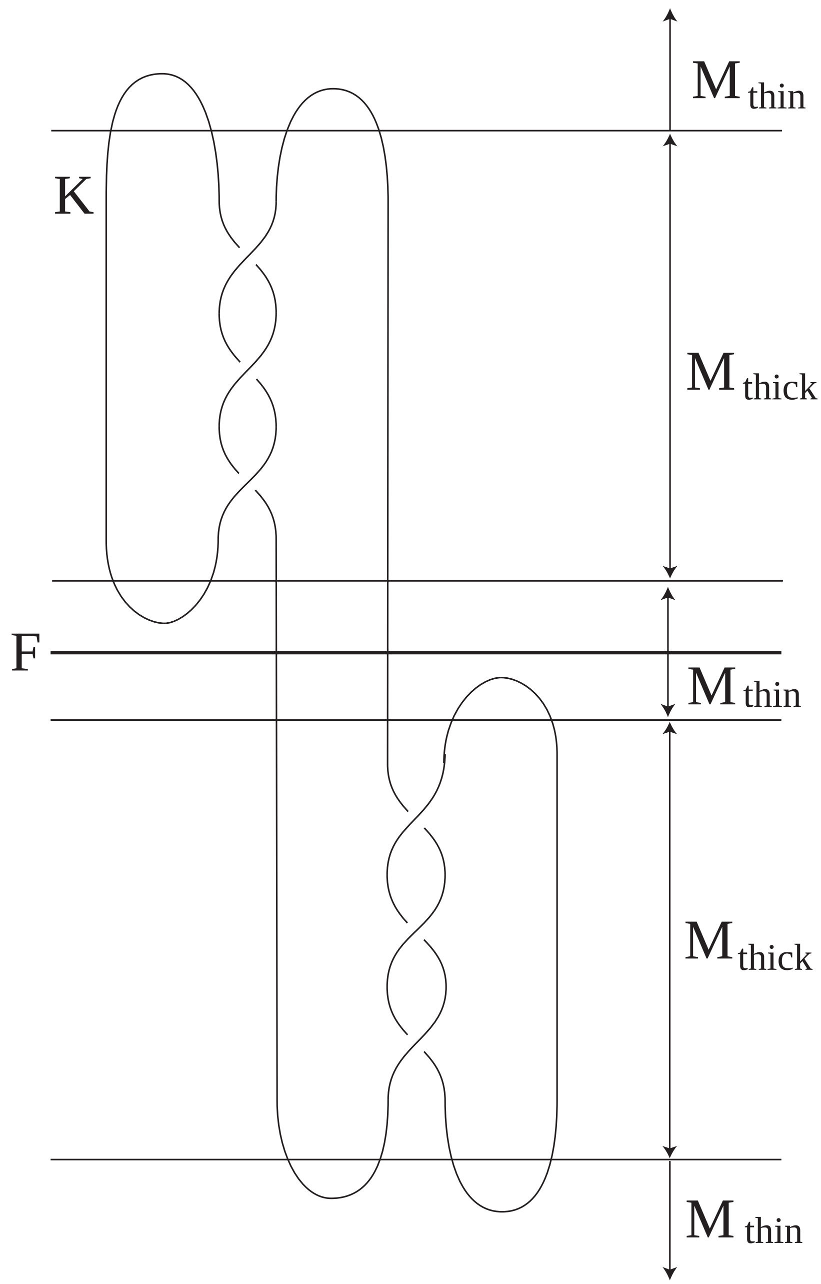
Result.

定理 1

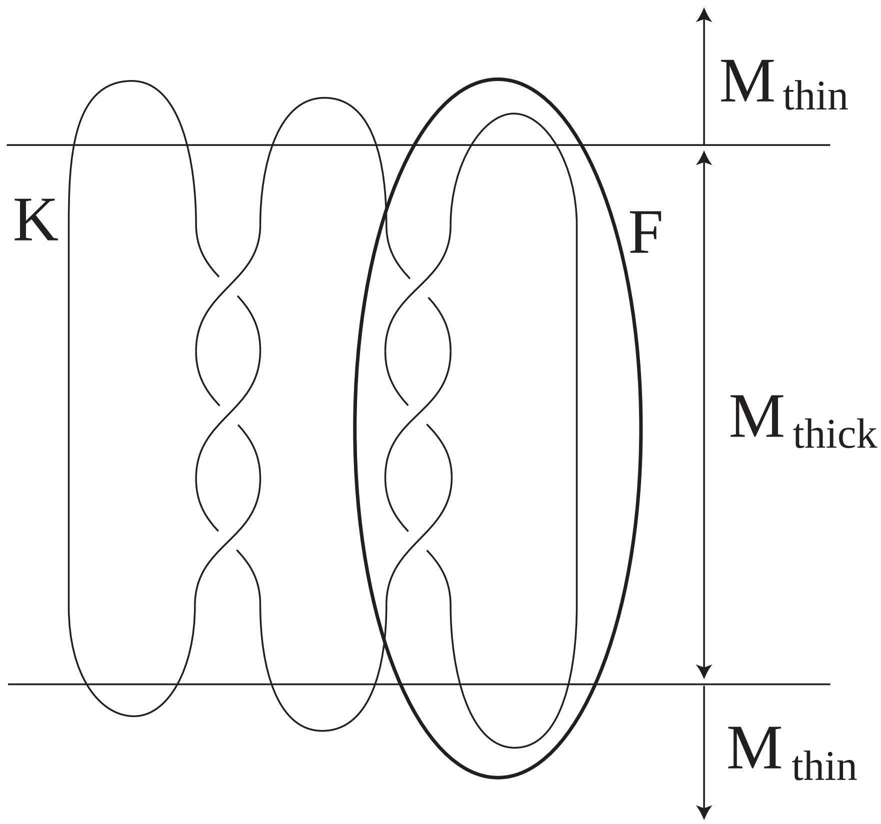
$K \subset S^3$をhに関してMorse positionにある結び目とし、$F \subset S^3$をKと交わらないか、又はKと横断的に交わる閉曲面で、(S^3, K)内でincompressibleかつmeridionally incompressibleであるとする。この時、Fは次のいずれかのようにイソトープできる。

1. Fはthin level sphere、又は
2. FはKに関してessential Morse position

例1. F は thin level sphere



例2. F は K に関して essential Morse position



結び目Kを$h : S^3 \to \mathbb{R}$に関してMorse positionにおく。

$a_0, \ldots, a_n$をKの臨界点で、対応する臨界値$t_i = h(a_i)$が、各iに対して$t_{i-1} < t_i$を満たすものとする。

P_iをa_{i-1}とa_iの間のlevel sphereとする。

アンビエントイソトピーの下での最小値

$$w(K) = \min \Sigma |P_i \cap K|$$

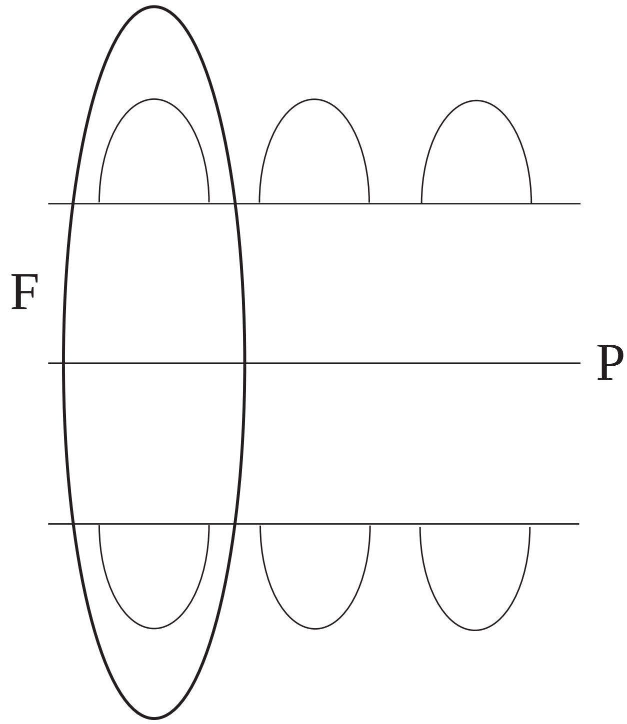
をKの**width**といい、$w(K)$を実現するKのMorse positionを**thin position**という。

曲面$F \subset S^3$についても同様にthin positionを定義する。

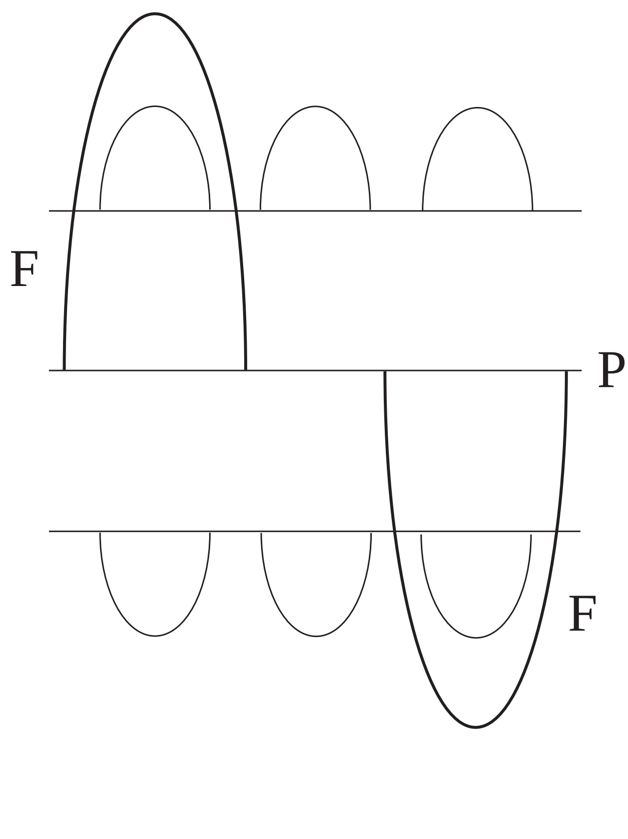
定理 2

$K \subset S^3$ を h に関して thin position にあり、thin level sphere を持たない結び目とする。
$F \subset S^3$ を K と交わらないか又は K と横断的に交わる圧縮不能閉曲面で、K を止めて thin position にあるとする。
この時、K の thick level sphere P で、$P \cap F$ の各成分が P と F 内で本質的なものが存在する。

1.



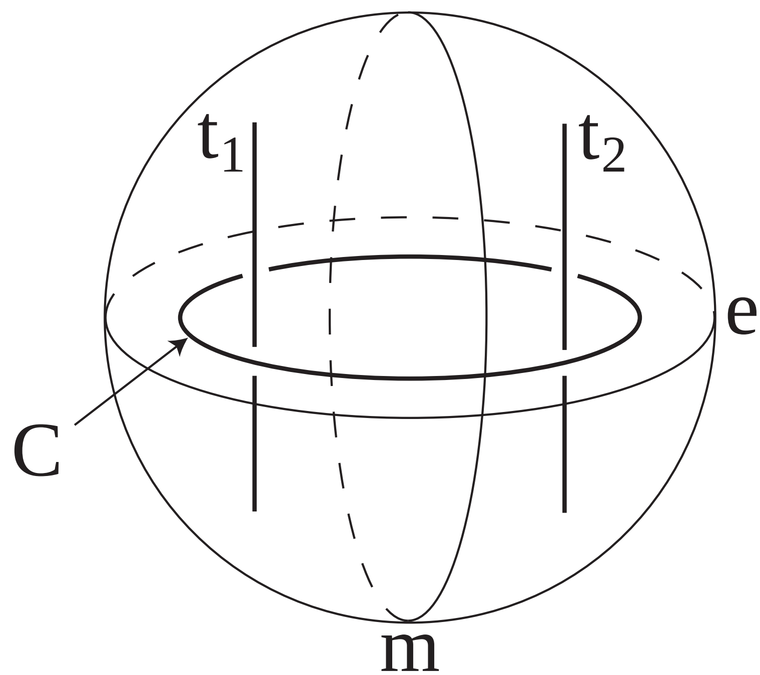
2.



2-string trivial tangle $(B, t_1 \cup t_2)$にtrivial loop Cを加えたtangleを**Hopf tangle**という。

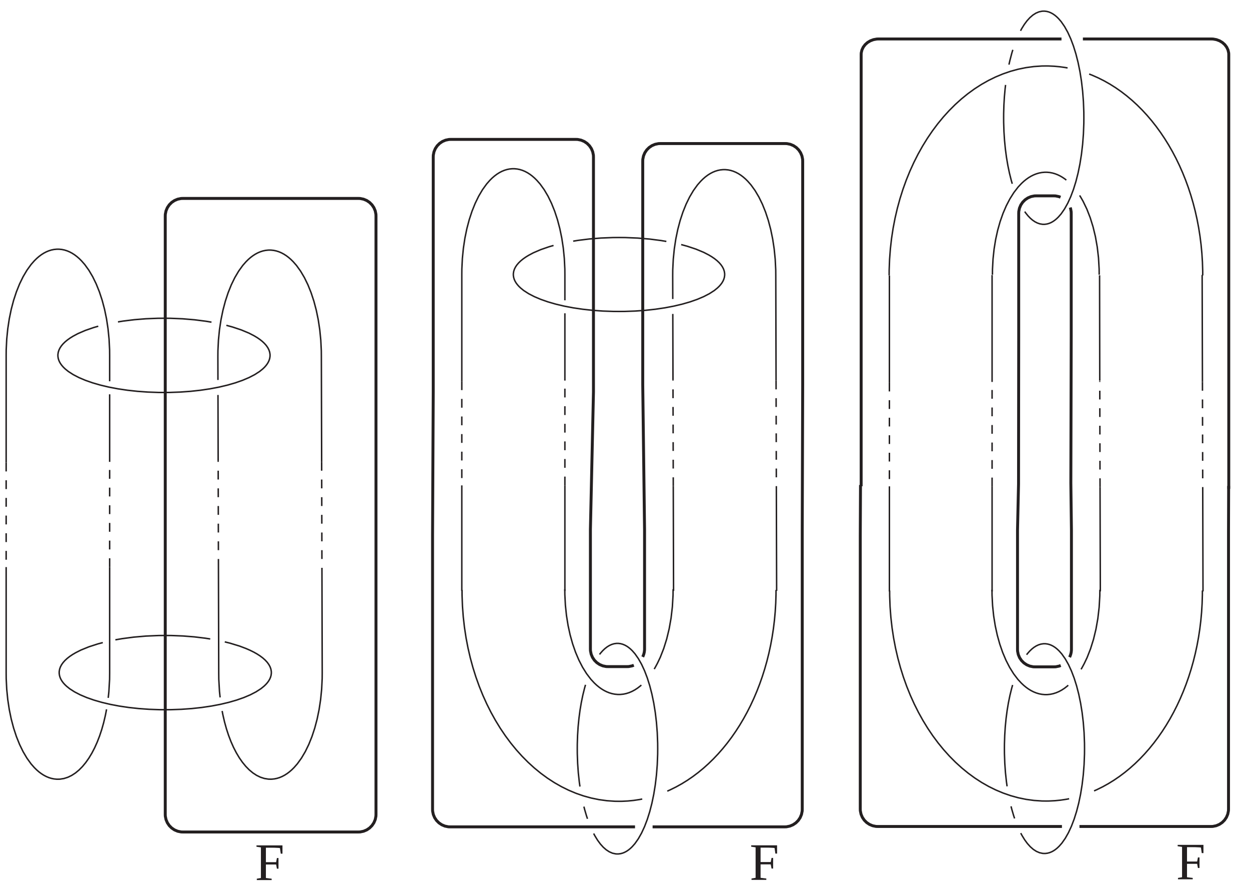
∂B上のloop eで、trivial loop Cとannulusを$B-(t_1 \cup t_2)$内でcoboundするものをHopf tangle (B, T)の**equator**という。

∂B上のloop mで、t_1とT_2を分離するdiskを$B-(t_1 \cup t_2)$内でboundするものをHopf tangle (B, T)の**meridian**という。



Hopf tangle (B, T)

二つのHopf tangle (B_1, T_1)と(B_2, T_2)を、x_1がx_2と一致するように貼り合わせて得られるlinkからなる集合を$\mathcal{L}(x_1, x_2)$とする。ここで、x_iは(B_i, T_i)のequator e_iか又はmeridian m_iとする。



$\mathcal{L}(m_1, m_2)$ $\mathcal{L}(m_1, l_2)$ $\mathcal{L}(l_1, l_2)$

定理 3

$L \subset S^3$ を Hopf tangle 分解

$$(S^3, L) = (B_1, T_1) \cup (B_2, T_2)$$

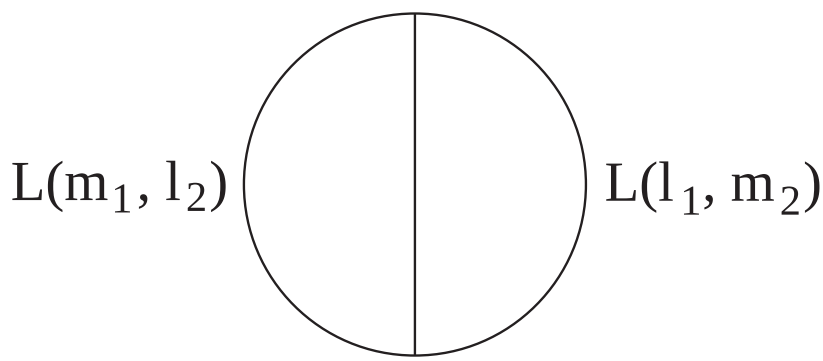
をもつ link とするとき、

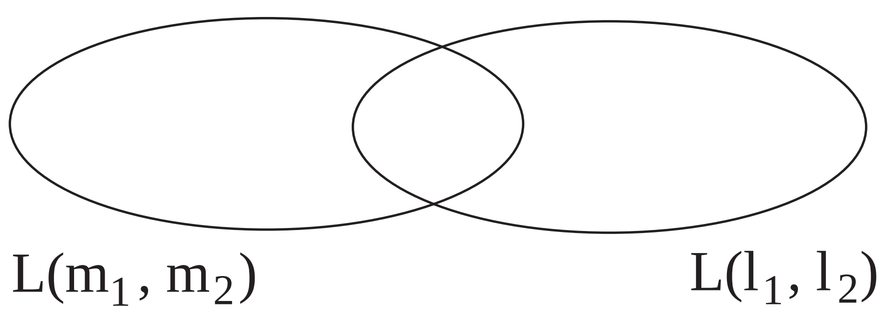
1. (S^3, L) 内に分解球面と異なる incompressible かつ meridionally incompressible closed surface が存在する
   $\iff L \in \mathcal{L}(m_1, m_2) \cup \mathcal{L}(m_1, l_2) \cup \mathcal{L}(m_2, l_1) \cup \mathcal{L}(l_1, l_2)$
2. L が一意的な Hopf tangle 分解をもつ
   $\iff L \notin \mathcal{L}(m_1, m_2) \cup \mathcal{L}(m_1, l_2) \cup \mathcal{L}(m_2, l_1)$
   もし $L \in \mathcal{L}(m_1, m_2) \cup \mathcal{L}(m_1, l_2) \cup \mathcal{L}(m_2, l_1)$ ならば、L はちょうど二つの Hopf tangle 分解をもつ。
3. L が small $\iff L \notin \mathcal{L}(l_1, l_2)$
   もし $L \in \mathcal{L}(l_1, l_2)$ ならば、$S^3 - \mathrm{intN(L)}$ 内に essential torus が存在する。

$$\mathcal{L}(m_1, m_2) \cap (\mathcal{L}(m_1, l_2) \cup \mathcal{L}(m_2, l_1)) = \emptyset$$

$$(\mathcal{L}(m_1, l_2) \cup \mathcal{L}(m_2, l_1)) \cap \mathcal{L}(l_1, l_2) = \emptyset$$

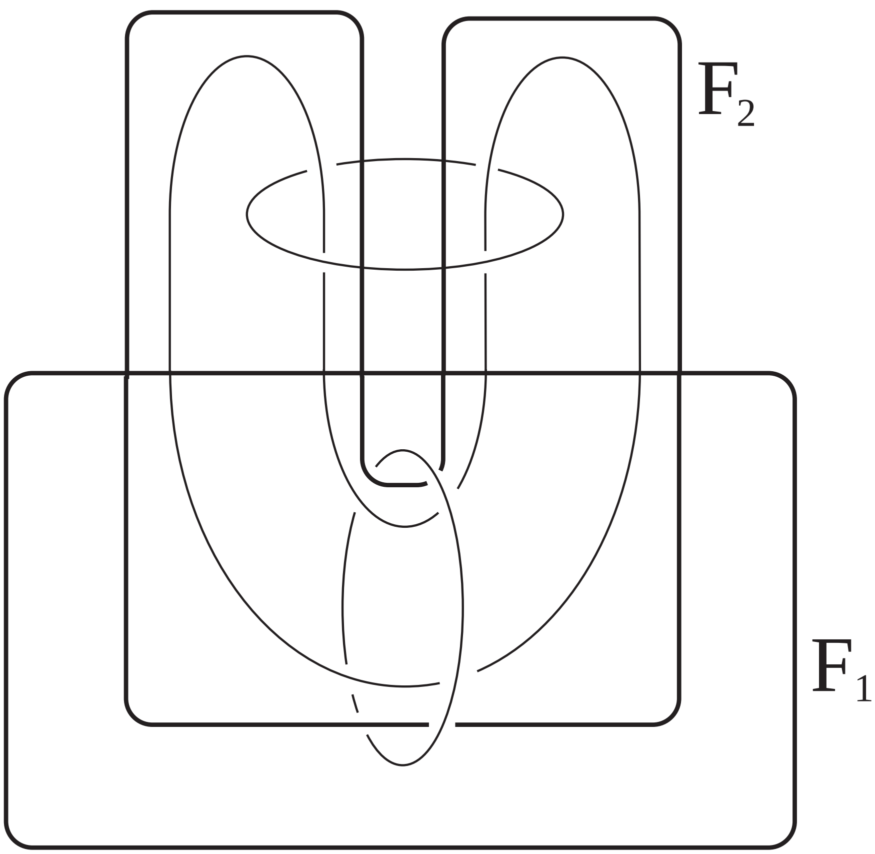
$\mathcal{L}(m_1, m_2) \cap \mathcal{L}(l_1, l_2)$ は二つのHopf tangleを恒等写像で貼り合わせて得られる唯一のlinkから成る。





ボロミアン環は$\mathcal{L}(m_1, l_2) \cup \mathcal{L}(l_1, m_2)$に属する。よって、$\mathcal{L}(m_1, m_2)$と$\mathcal{L}(l_1, l_2)$には属さない。

定理２より、ボロミアン環は丁度二つのHopf tangle分解球面F_1，F_2をもち、smallである。Lozano と Matsuda もボロミアン環がsmallであることを独立に示している。



Proof.

定理 1 の証明の流れ

Step 1. $F \cap M_{thin}$ を incompressible かつ meridionally incompressible な disk 又は annulus のみにする。

$$\downarrow$$

Step 2. $|F \cap M_{thin}|$ を最小にした上で、$F \cap M_{thick}$ の臨界点の個数を最小にする。

$$\downarrow$$

Step 3. $F \cap M_{thick}$ が $(M_{thick}, K \cap M_{thick})$ で incompressible かつ meridionally incompressible を示す。

$$\downarrow$$

場合分け

もし $F \cap M_{thick}$ が極大点又は極小点を持たなければ、F はessential Morse positionである。（結論2）

もし $F \cap M_{thick}$ が極大点又は極小点を持つならば、F はthin level sphereにイソトピックである。（結論1）

Preliminary.

S : 2-sphere
$F \subset S \times I$: surface

$p : S \times I \to S \times \{0\}$: projection
$h : S \times I \to I$: height function

定義

$S \times I$のイソトピーϕ_tが、任意の$t \in [0, 1]$に対して$h \circ \phi_t = h$を満たすとき、**horizontal isotopy**という。

定義

Fが**horizontally ∂-parallel** in $S \times I$
$\iff$

- Fが$S \times I$内で∂-parallelかつ
- $\exists$ horizontal isotopy ϕ_t
  s.t. $p \circ \phi_1$ is a homeomorphism on F

補題1

Sを球面、XをS上の点の和、$F \subset (S \times I, X \times I)$を圧縮不能曲面とする。もし、$F$がhorizontally ∂-parallelならば、Fは$(S \times I, X \times I)$内で∂-parallelである。

証明

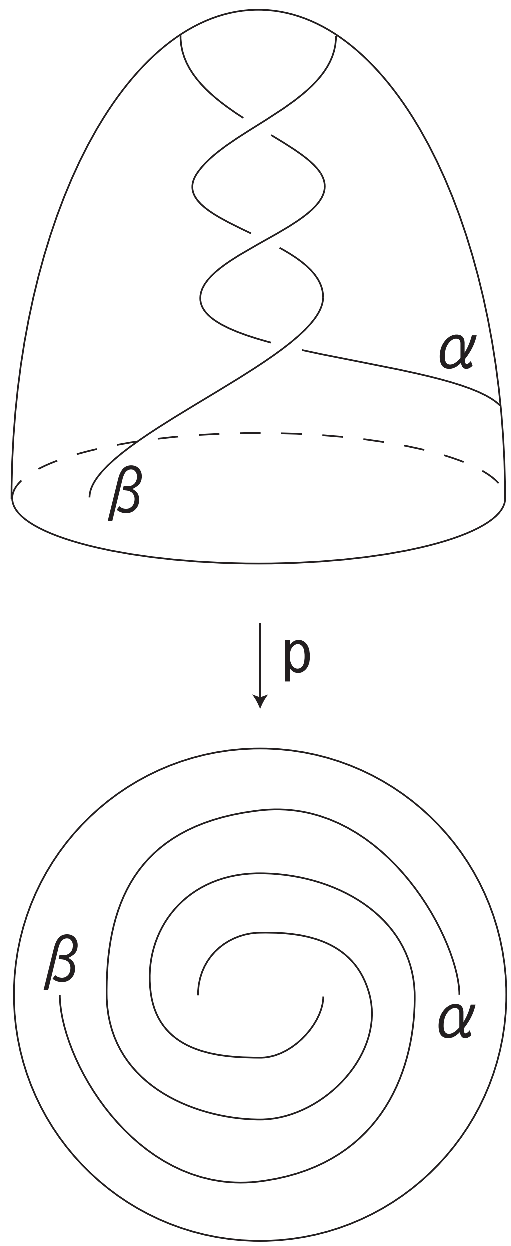
Fはhorizontally　∂-parallelであるから、pはF上homeomorphismとしてよい。

また、$X \times I$は単調であるから、pは$(X \times I) \cap V$上homeomorphismとしてよい。ここで、VはFと$p(F)$がboundする3-manifoldである。

このとき、$p((X \times I) \cap V)$はdisjoint arcsから成る。

仮に、$(X \times I) \cap V$のarc αで、$\partial\alpha$がFに含まれるものがあったとすると、αとF上のarcがdiskをboundするので、Fが圧縮不能であることに反する。

故に、$(X \times I) \cap V$ の任意の arc は F と $p(F)$ を単調に繋いでいるので、F は ∂-parallel である。



補題2

Sを球面、XをS上の点の和、$F \subset (S \times I, X \times I)$を$h : S \times I \to I$に関してMorse positionにある圧縮不能曲面とする。Fのイソトピーで、Fの臨界点の個数を最小と仮定する。このとき、もしFが極大点を持つならば、Fは$(S \times I, X \times I)$内で∂-parallelである。

証明

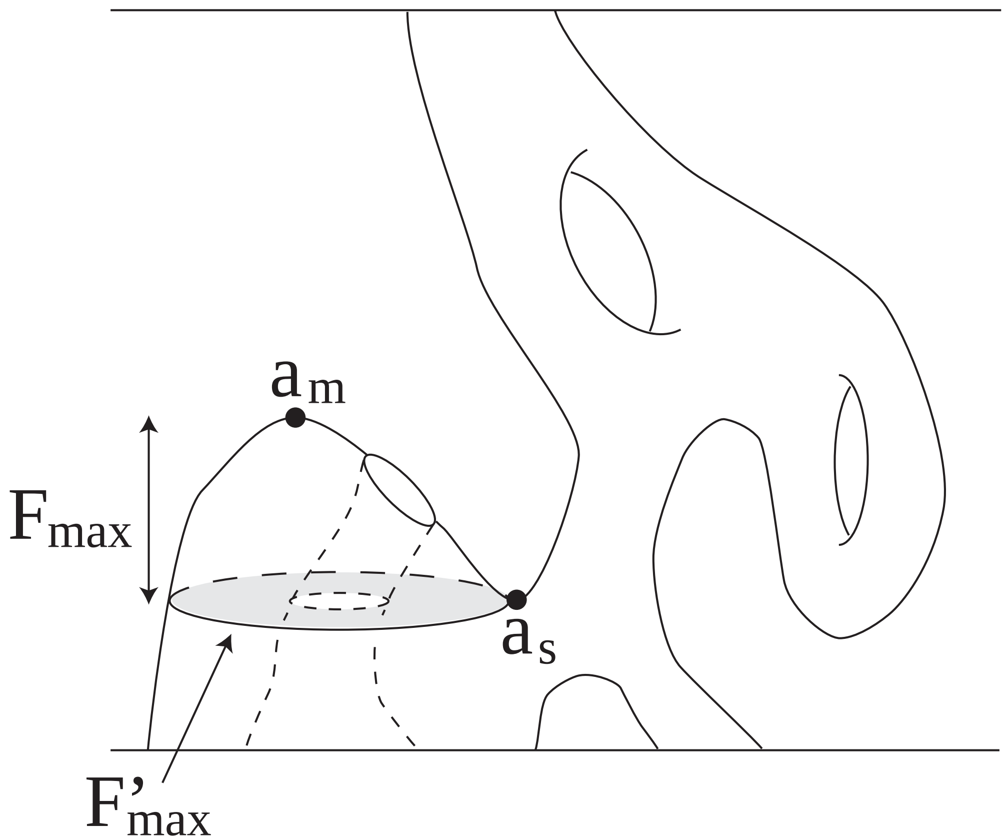
$a_0, \ldots, a_n$をFの臨界点で、対応する臨界値$t_i = h(a_i)$が、各iに関して$t_{i-1} < t_i$を満たすものとする。

a_mを**最も低いFの極大点**とする。

もし$m = 0$ならば、Fは唯一の極大点a_0を持つディスクであり、$(S \times I, X \times I)$内で∂-parallelである。

以下、$m \geq 1$と仮定する。

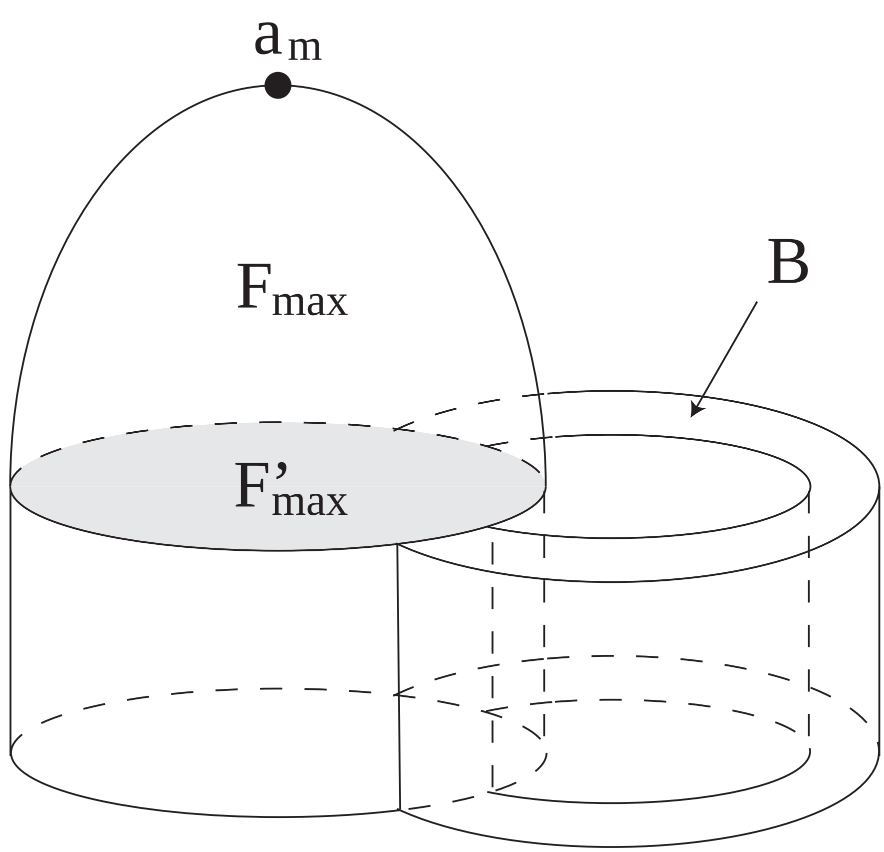
F_{max}を、a_mを含むFの**極大な**∂**-parallel 部分曲面**とする。



F_{max}に関与する次の臨界点a_sは、a_mが最も低い極大点であるから、鞍点又は極小点である。

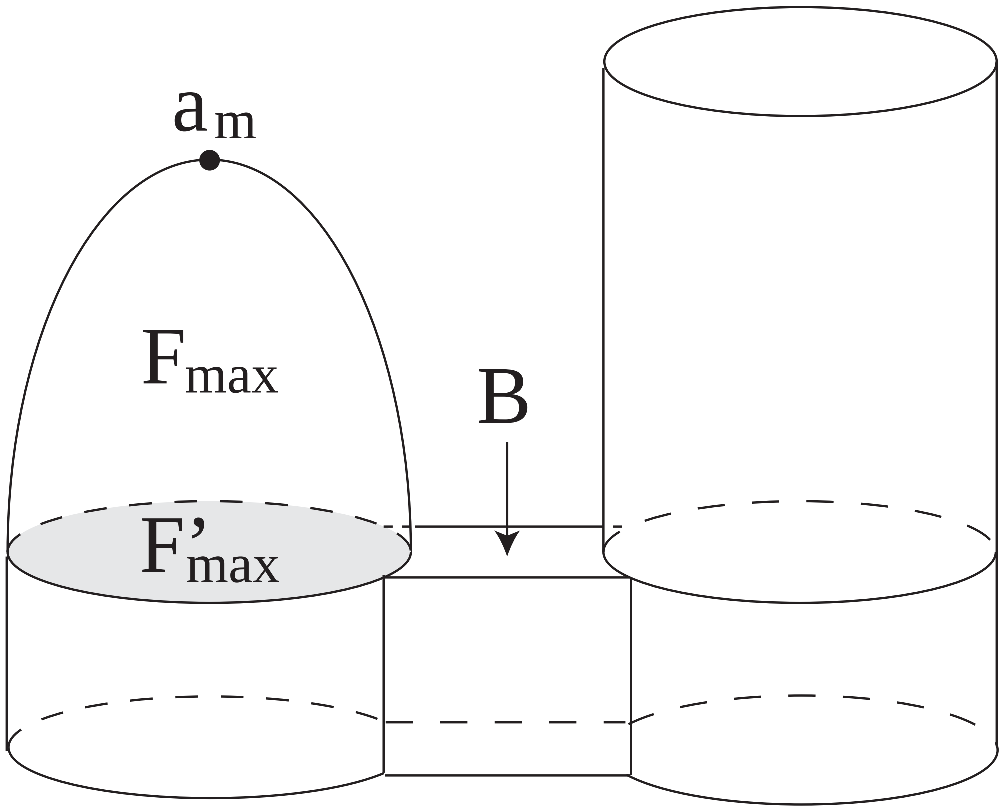
鞍点の近傍をバンドBとみなし、極小点の近傍をディスクEとみなす。

Case 1 バンド B は F'_{max} の外側にあり、F_{max} の同じ境界成分を繋ぐ。



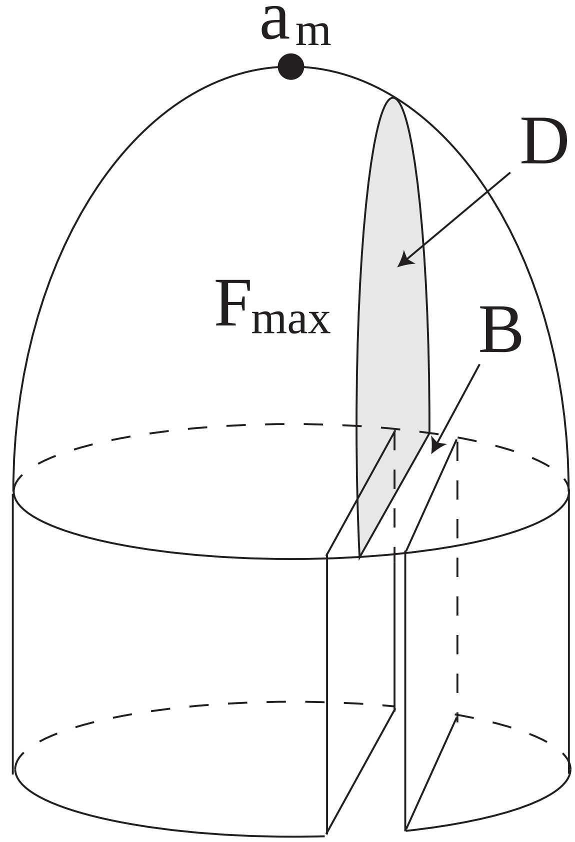
この場合、更に大きな ∂-parallel 部分曲面ができ、F_{max} の極大性に反する。

Case 2 バンド B は F'_{max} の外側にあり、 F_{max} の境界成分と他の部分曲面の境界成分を繋ぐ。



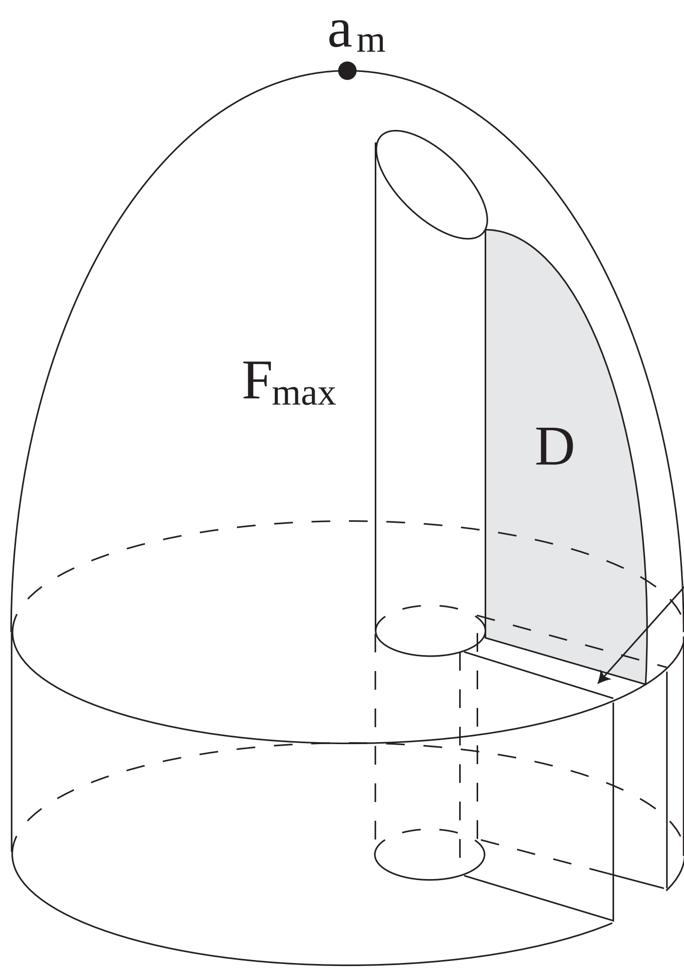
この場合、F_{max} から F'_{max} へのイソトピーにより、極大点 a_m と鞍点 a_s がキャンセルする。これは、F の臨界点の個数の最小性に矛盾する。

Case 3 バンド B は F'_{max} の内側にあり、F_{max} の同じ境界成分を繋ぐ。



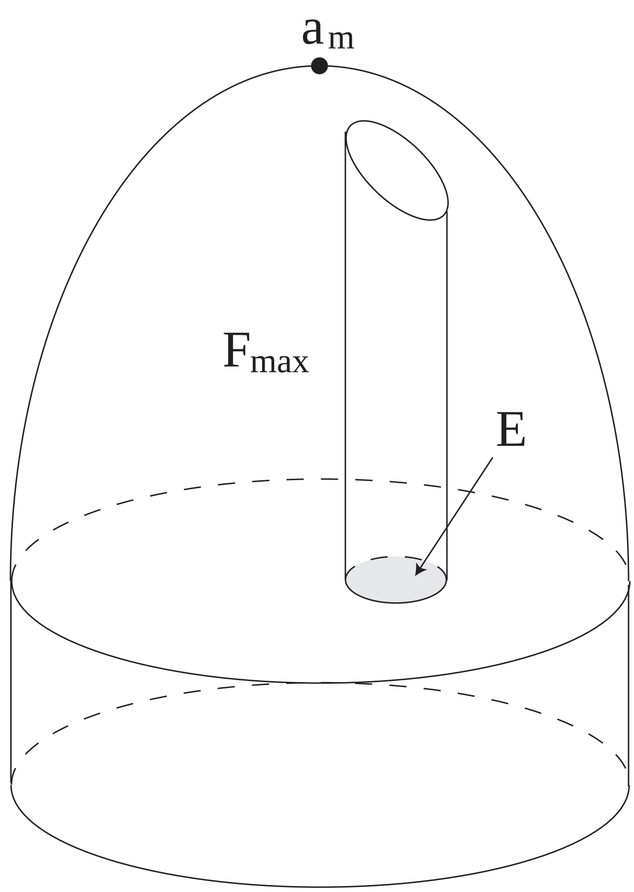
この場合、$F_{max} \cup B$ に対する圧縮ディスク D が存在する。F は圧縮不能であるから、ディスク $D' \subset F$ で $\partial D' = \partial D$ を満たすものが存在する。この時、D' から D へのイソトピーにより、鞍点 a_s が消去される。

Case 4 バンド B は F'_{max} の内側にあり、F_{max} の異なる境界成分を繋ぐ。



この場合、$F_{max} \cup B$ に対する圧縮ディスク D が存在する。∂D は F 内本質的であるから、D は F の圧縮ディスクであり、F が圧縮不能という仮定に矛盾する。

Case 5 ディスクEはF_{max}の境界成分に沿ってF_{max}に蓋をする。



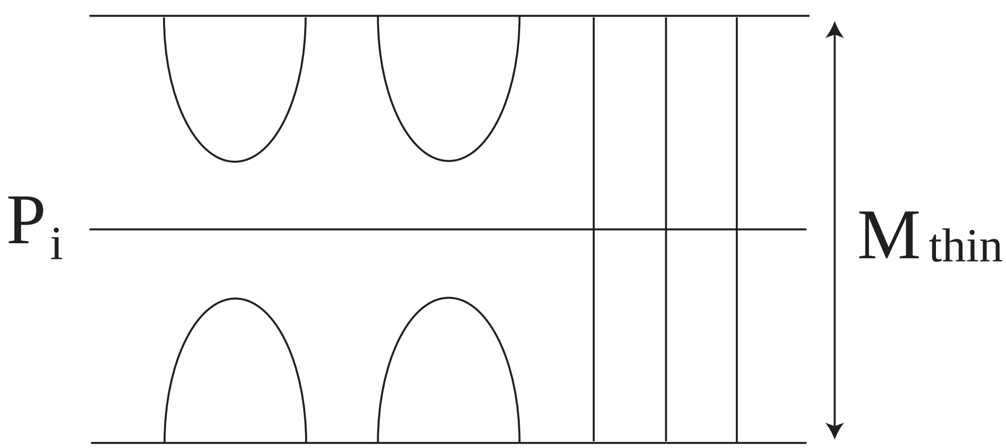
F_{max}がディスクでない場合、$F_{max} \cup E$から$F'_{max} \cup E$へのイソトピーにより、F_{max}の鞍点と極小点a_sがキャンセルする。
F_{max}がディスクの場合は、Fはlevel sphereにイソトピックとなる。$\square$

Proof of Theorem 1.

Step 1. $F \cap M_{thin}$ を圧縮不能ディスク又はアニュラスのみにする。

M_{thin} の各成分を thin level sphere P_i で二つに分割する。

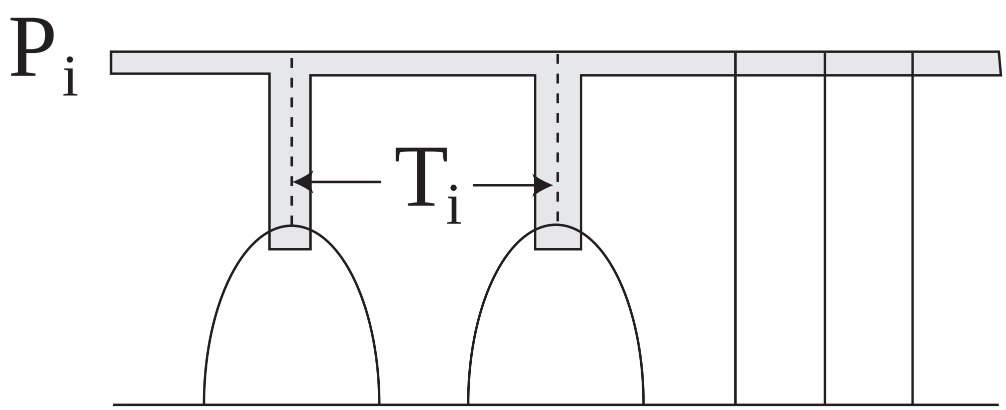
分割された成分と K との交わりは単調なアークか、唯一の極大点又は極小点を持つアークのみとなる。



Fが圧縮不能であるから、$F \cap P_i$の各成分は$P_i - K$内で本質的なループのみとしてよい。

P_iからKの極大点（又は極小点）に単調なアークT_iを繋ぎ、$F \cap T_i$を一般の位置にする。

この時、$N(P_i \cup T_i)$とFとの交わりは、圧縮不能なディスク又はアニュラスのみとなる。



$N(P_i \cup T_i)$の残りの部分は、(球面, 点)の組の直積であるから、Fのイソトピーにより、Fとの交わりも直積であるとしてよい。□

Step 2. $|F \cap M_{thin}|$を最小にした上で、$F \cap M_{thick}$の臨界点の個数を最小にしておく。

Step 3. $F \cap M_{thick}$が$(M_{thick}, K \cap M_{thick})$で圧縮不能を示す。

仮に$F \cap M_{thick}$が$(M_{thick}, K \cap M_{thick})$で圧縮可能であったとすると、圧縮ディスク$D \subset M_{thick}$が存在する。

しかし、Fは(S^3, K)内で圧縮不能であるから、ディスク$D' \subset F - K$で、$\partial D' = \partial D$を満たすものが存在する。

$D' \cap M_{thin} \neq \emptyset$であるから、$D'$から$D$へのイソトピーにより、$|F \cap M_{thin}|$が減る。

これは、$|F \cap M_{thin}|$の最小性に矛盾する。$\square$

もし$F \cap M_{thick}$が極大点又は極小点を持たなければ、essential Morse positionの条件1〜4が満たされ、定理の結論2を得る。

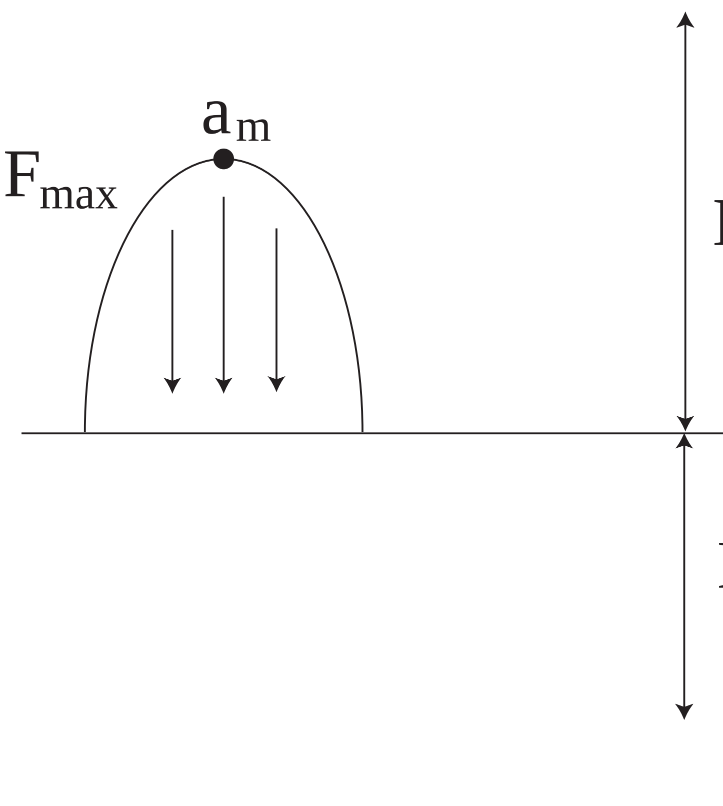
essential Morse positionの条件

1. Fはhに関してMorse position
2. FとKは一般の位置にあり、$F \cap K \subset M_{thick}$
3. Fの全ての極大点と極小点はM_{thin}に含まれ、全ての鞍点はM_{thick}に含まれる。
4. $F \cap M_{thin}$及び$F \cap M_{thick}$の各成分が、それぞれ$(M_{thin}, K \cap M_{thin})$及び$(M_{thick}, K \cap M_{thick})$でincompressibleかつmeridionally incompressible

$\boxed{\text{もし } F \cap M_{thick} \text{ が極大点又は極小点を持つならば、} F \text{ は thin level sphere にイソトピックであり、定理の結論1を得る。}}$

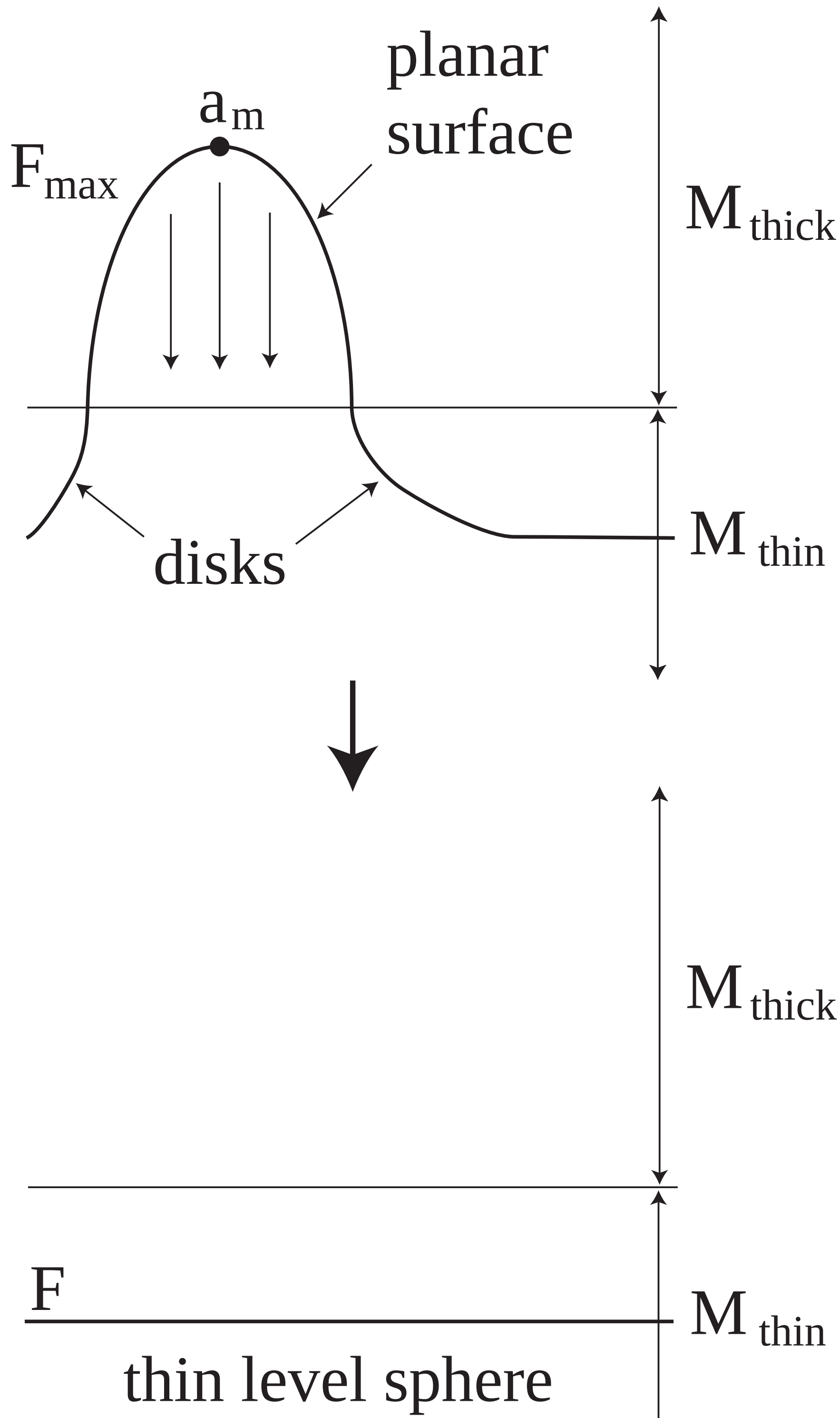
一般性を失わず、$F \cap M_{thick}$が極大点を持つと仮定する。

a_mを最も低い$F \cap M_{thick}$の極大点とすると、補題1により、a_mを含む$F \cap M_{thick}$の成分F_{max}は、M_{thin}へ∂-parallelである。



Case 1. F_{max}が$F \cap M_{thin}$のアニュラスと繋がらない。

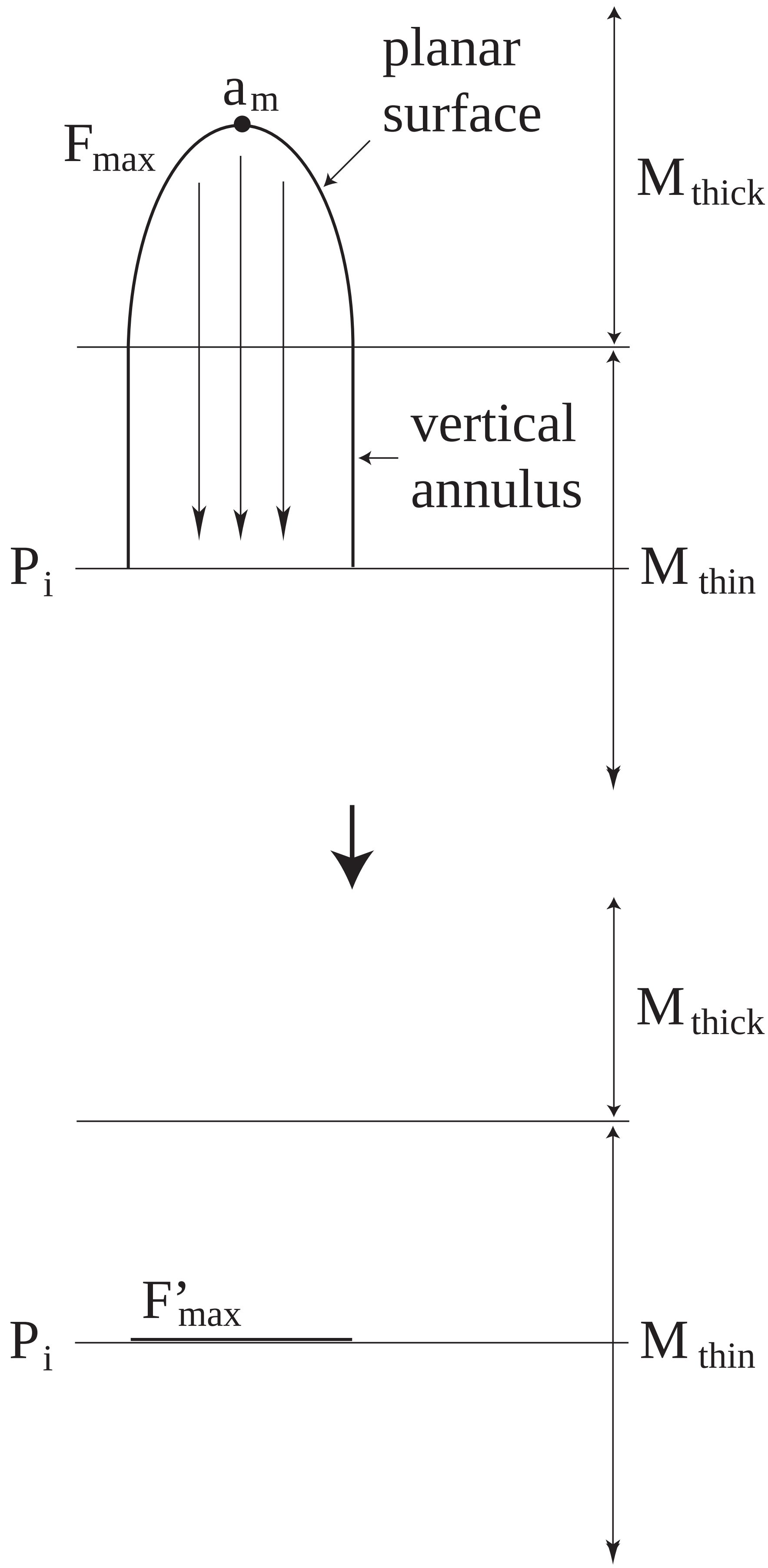
この場合、Fはplanar surface F_{max}とdisks $F \cap M_{thin}$の和となるから、FはM_{thin}に完全に含まれる球面である。補題1により、Fはthin level sphere P_iにparallelであるので、定理の結論1を得る。



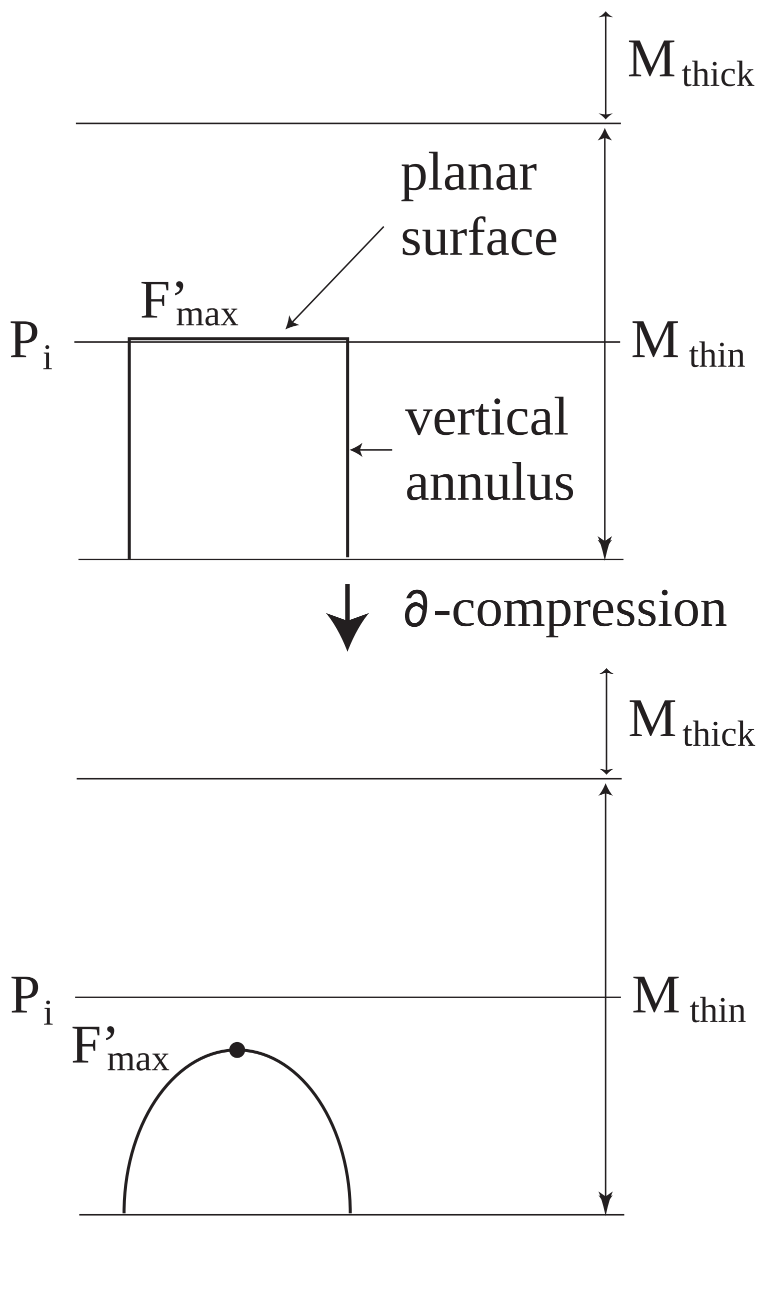
planar
surface
a_m
F_{max}
M_{thick}
disks
M_{thin}
M_{thick}
F
M_{thin}
thin level sphere

Case 2. F_{max}が$F \cap M_{thin}$のアニュラスと繋がる。

この場合、F_{max}はthin level sphere P_iの部分曲面F'_{max}へとイソトピックである。


planar
surface
a_m
F_{max}
M_{thick}
vertical
annulus
P_i
M_{thin}
M_{thick}
F'_{max}
P_i
M_{thin}

従って、必要ならば∂-compressionを行うことにより、F'_{max}は唯一の極大点を持つディスクであると仮定してよい。



以上の操作において、$|F \cap M_{thin}|$は増えず、少なくとも一つの極大点a_sが消去される。

これは、$F \cap M_{thick}$の臨界点の個数の最小性に矛盾する。$\square$